

MAT 1700

Méthodes mathématiques I

Chapitre 10

Les fondements du calcul à plusieurs variables

P. Boily, F. Fotso (uOttawa)

Session d'automne – 2020

Session d'hiver – 2021

Le calcul dans la joie (Boily et Hart)

Aperçu

Scénario – Les gugusses et les gogosses (p.2)

10.1 – Les fonctions de plusieurs variables (p.8)

10.2 – Les dérivées partielles (p.18)

10.3 – Le plan tangent (p.26)

10.4 – L'optimisation à deux variables (p.34)

Résumé (p.50)

Exercices suggérés (p.51)

Scénario – Les gugusses et les gogosses

Exemple: la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés (en milliers de dollars) par l'expression

$$81 + 16xy - x^4 - y^4,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Combien d'article de chaque sorte doit-elle vendre afin de maximiser ses profits, si la vente de chaque article ne peut dépasser 3000 unités par mois?

Solution: on cherche à maximiser la fonction

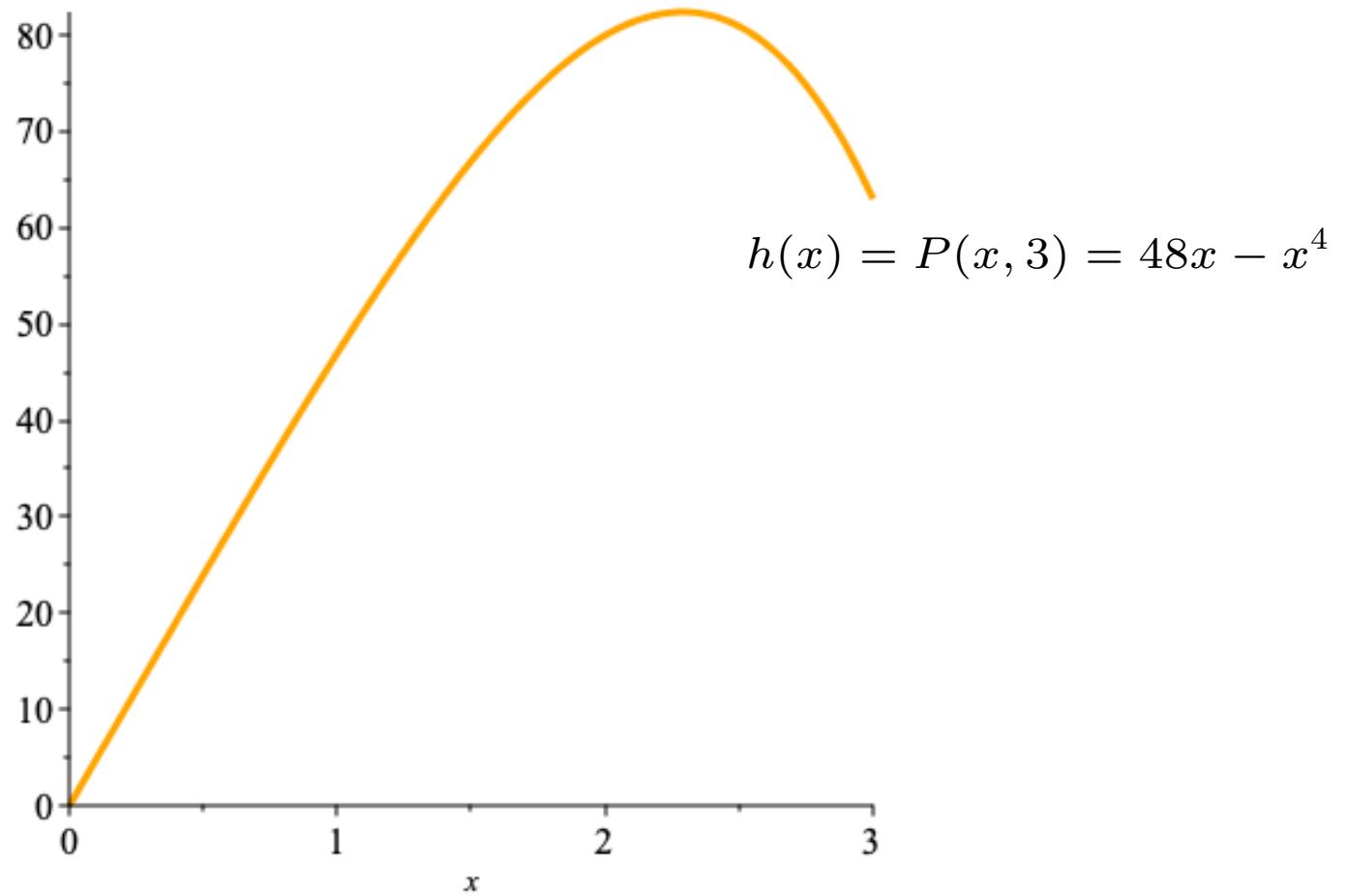
$$P = P(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4,$$

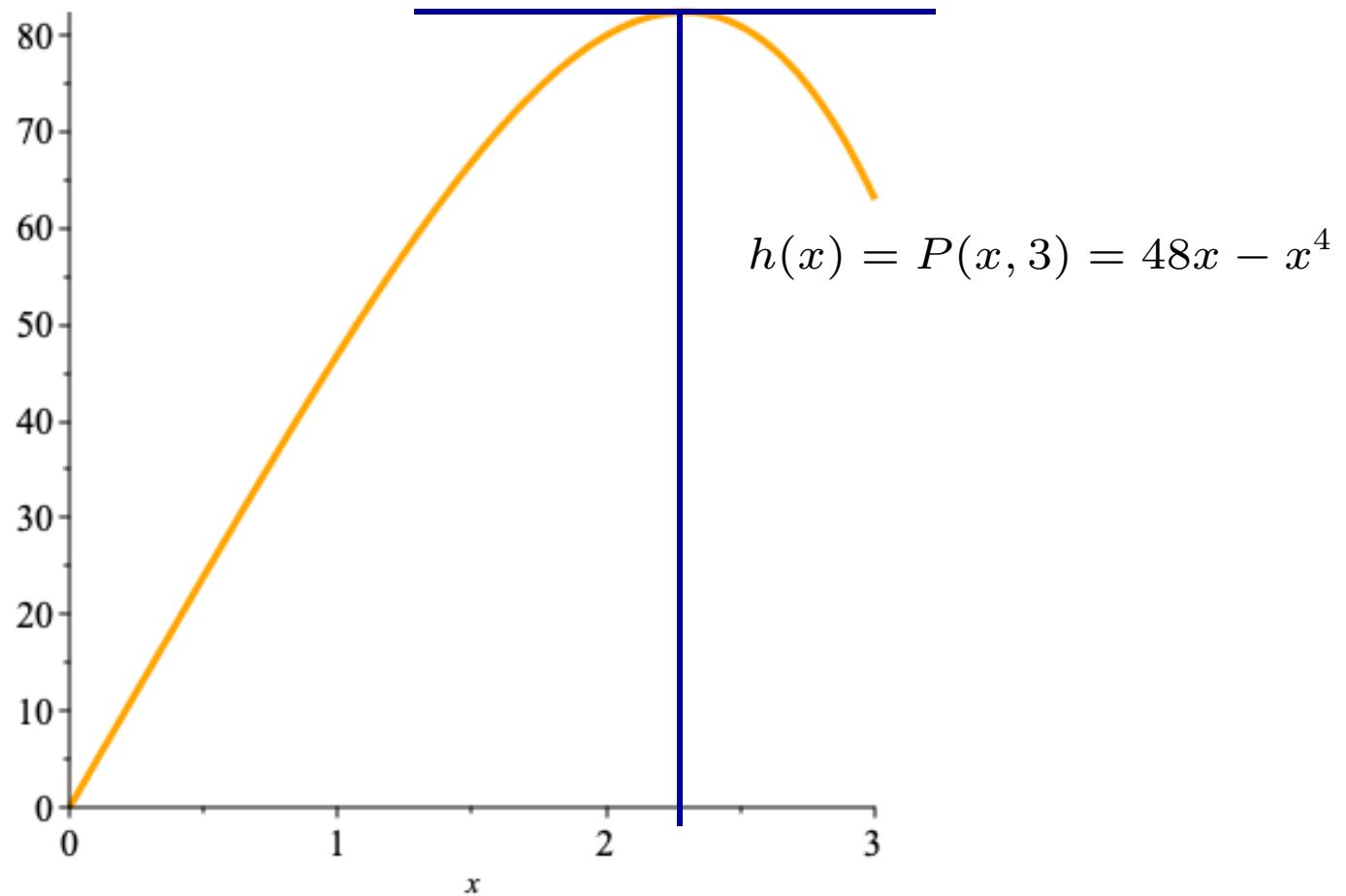
soumise aux restrictions $0 \leq x \leq 3$ and $0 \leq y \leq 3$.

⚠ La marche à suivre présentée au chapitre 6 ne peut-être utilisée directement puisque les ventes de gugusses et de gogosse ne sont pas reliées: il est donc impossible d'éliminer une des variables.

Si *Cie. Inc.* s'attend à vendre 3000 gogosse ($y = 3$ est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$h(x) = P(x, 3) = 81 + 16 \cdot 3x - 3^4 - x^4 = 48x - x^4.$$





Puisque $h'(x) = 48 - 4x^3$, le seul point critique de $h(x)$ est $x = 12^{1/3} \approx 2.29$. On ajoute les bornes $x = 0$ et $x = 3$, et on obtient le tableau suivant:

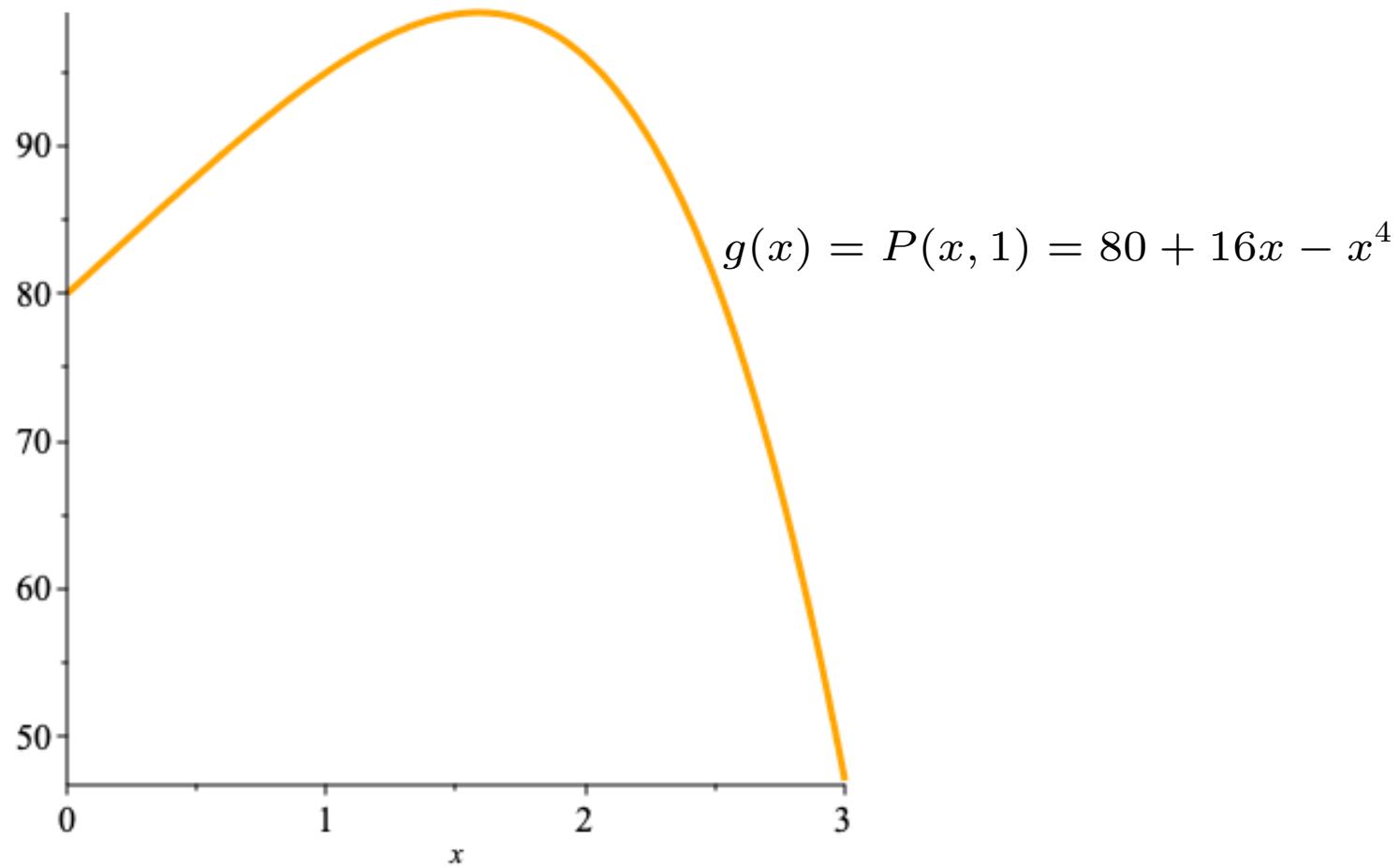
x	0	$12^{1/3}$	3
$h(x)$	0	≈ 82.42	63

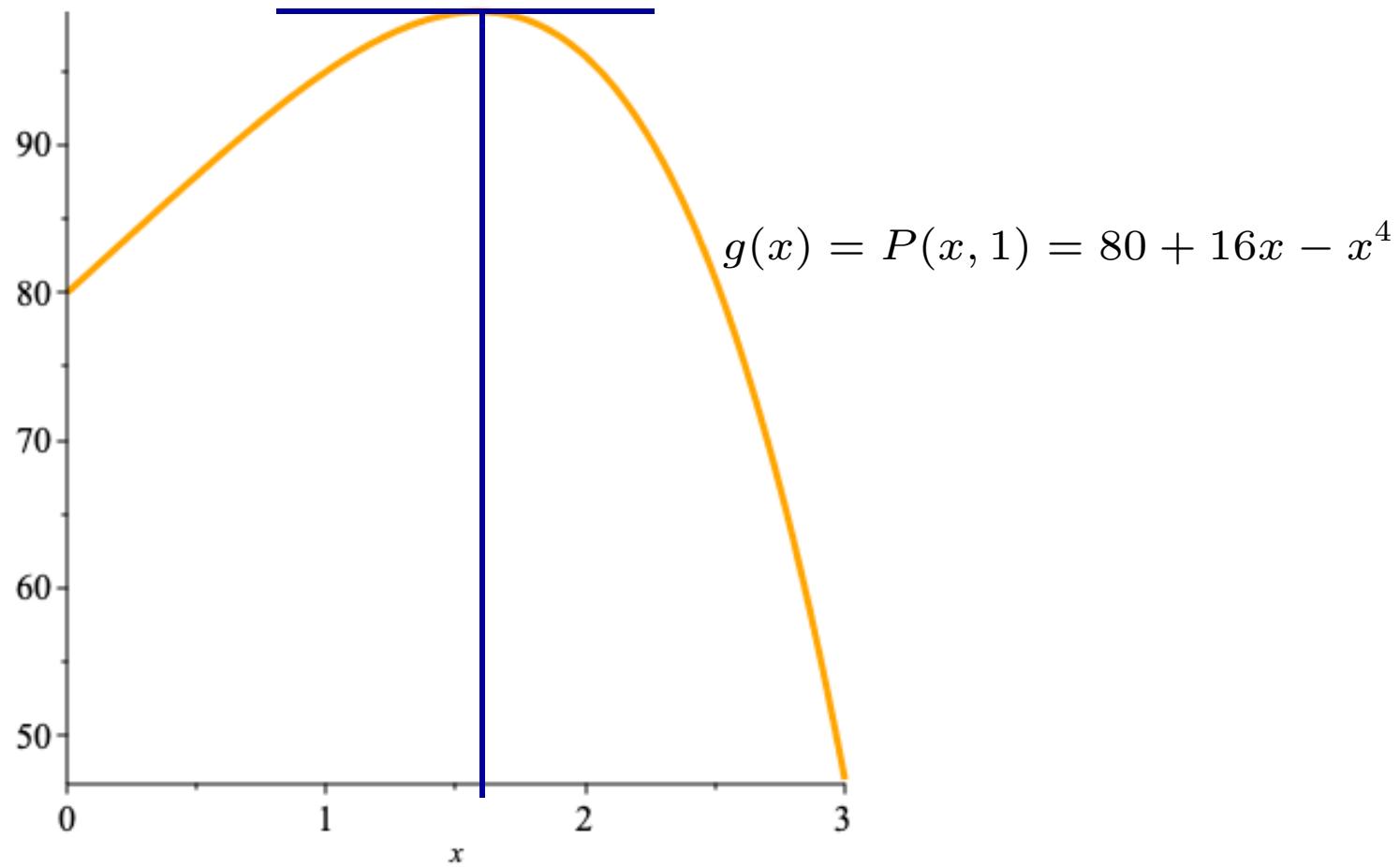
Ainsi, h admet un maximum en $x = 12^{1/3} \approx 2.29$.

Est-ce que c'est aussi un maximum de P ?

Si, au lieu, *Cie. Inc.* s'attend à vendre 1000 gogosses ($y = 1$ est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$g(x) = P(x, 1) = 81 + 16x - 1 - x^4 = 80 + 16x - x^4.$$





Puisque $g'(x) = 16 - 4x^3$, le seul point critique de $g(x)$ est $x = 4^{1/3} \approx 1.59$. On ajoute les bornes $x = 0$ et $x = 3$, et on obtient le tableau suivant:

x	0	$4^{1/3}$	3
$g(x)$	80	≈ 99.05	47

Ainsi, $g(x)$ admet un maximum en $x = 4^{1/3} \approx 1.59$.

Puisque $P(4^{1/3}, 1) > P(12^{1/3}, 3)$, P n'atteint pas sa valeur maximale lorsque $x = 12^{1/3}$ et $y = 3$.

⚠ Il est tentant d'en conclure que le maximum est alors atteint en $x = 4^{1/3}$ et $y = 1$, mais on peut s'imaginer choisir un autre y , et trouver un maximum encore plus élevé.

Nous ne sommes donc pas encore en mesure de répondre à la question. Nous y reviendrons.

10.1 – Les fonctions de plusieurs variables

En général, une quantité d'intérêt est affectée par plus d'une variable: le prix d'une maison, par exemple, est fonction des taux d'intérêts, du temps de l'année, du quartier, etc.

On ne peut pas appliquer tels quels les concepts du calcul à une variable (cf. scénario au début du chapitre).

Si $n \in \mathbb{N}^\times$, \mathbb{R}^n est l'ensemble des **n –tuples de nombres réels**:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

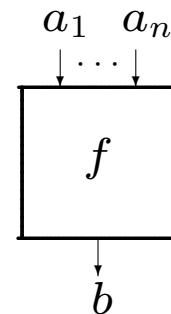
Ainsi $\mathbb{R}^1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$ représente une **droite**, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ un **plan**, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ l'**espace à 3 dimensions**, etc.

Une **fonction de n variables** est une règle associant un nombre unique à chaque élément de $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

- l'ensemble des points où la fonction est bien définie est son **domaine** D_f ;
- l'ensemble des valeurs que prend la fonction est son **image** I_f .

Si $f : A \rightarrow B$ est fonction de n variables, on dénote sa règle par

$$b = f(a_1, \dots, a_n) \quad \text{ou}$$



Exemples: considérons les fonctions à 2 variables suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$:

- $D_f = \mathbb{R}^2$, puisque $x + y$ existe pour toute paire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- $I_f = \mathbb{R}$, puisque $f(x, 0) = x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sqrt{x - y}$:

- $D_g = \{(x, y) | x - y \geq 0\}$, puisque $\sqrt{x - y}$ n'existe que si $x - y \geq 0$;
- $I_g = [0, +\infty)$, puisque $g(x^2, 0) = \sqrt{x^2 - 0} = x$ pour tout $x \geq 0$.

3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$:

- $D_h = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$, puisque $\frac{1}{x^2+y^2}$ existe si $(x, y) \neq (0, 0)$;
- $I_h = (0, +\infty)$, puisque $h(x^{-1/2}, 0) = \frac{1}{(x^{-1/2})^2+0} = x$ pour tout $x > 0$.

4. $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$:

- $D_k = \mathbb{R}^2$, puisque $e^{-(x^2+y^2)}$ existe pour toute paire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- $I_k = [-1, 0)$, puisque $0 < e^{-\mu} \leq 1$ pour tout $\mu = x^2 + y^2 \geq 0$.

La différence conceptuelle entre $n = 1$ et $n = 2$ est beaucoup plus prononcée que celle entre $n = 2$ et $n > 2$. Pour cette raison, on se concentre sur les fonctions à 2 variables.

Le graphique d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une courbe dans le plan \mathbb{R}^2 ; celle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface dans \mathbb{R}^3 :

$$z = f(x, y).$$

Les points de cette surface sont de la forme $P(a, b, f(a, b))$, où $(a, b) \in D_f$.

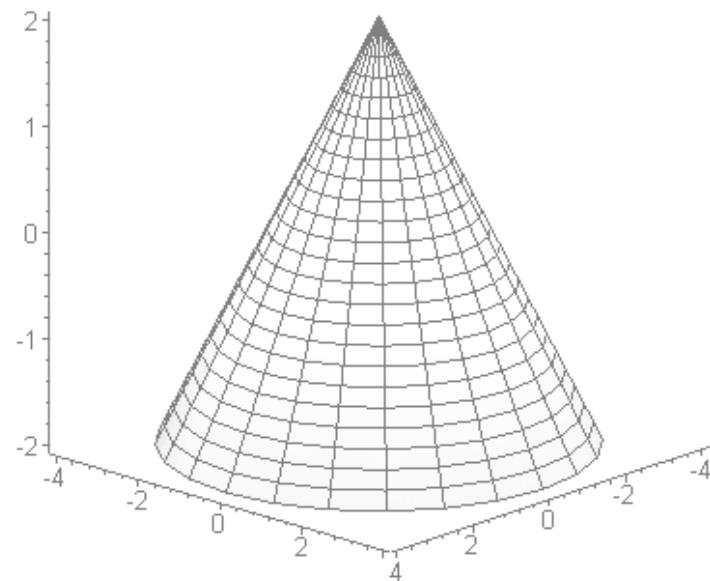
Par exemple, la surface définie par $z = x^2 - y$ est l'ensemble

$$\{(x, y, x^2 - y) : x, y, \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi $P(3, 1, 8)$ est sur la surface puisque $3^2 - 1 = 8$, tandis que $Q(3, 1, -2)$ ne l'est pas puisque $3^2 - 1 \neq -2$.

⚠ Il n'est pas évident de tracer une surface à la main.

Exemples: voici les graphiques de quelques surfaces $z = f(x, y)$, ainsi que les points saillants de ces dernières.

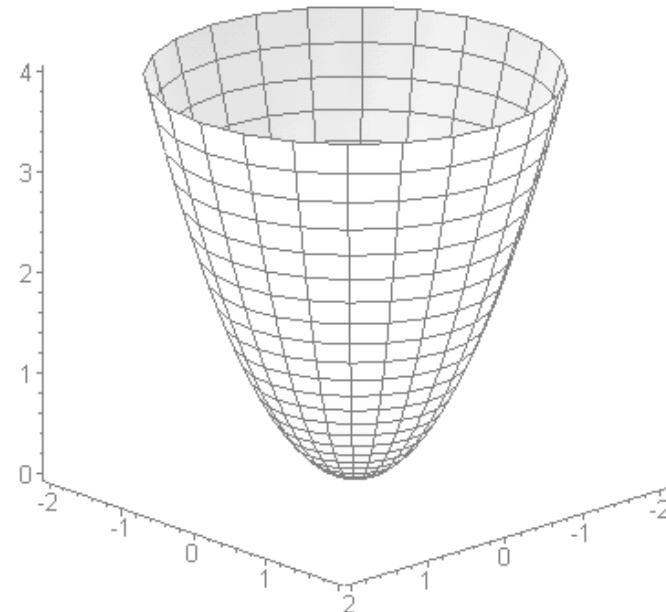


cône: $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

domaine: \mathbb{R}^2

image: $(-\infty, 2]$

maximum atteint en $(x, y) = (0, 0)$

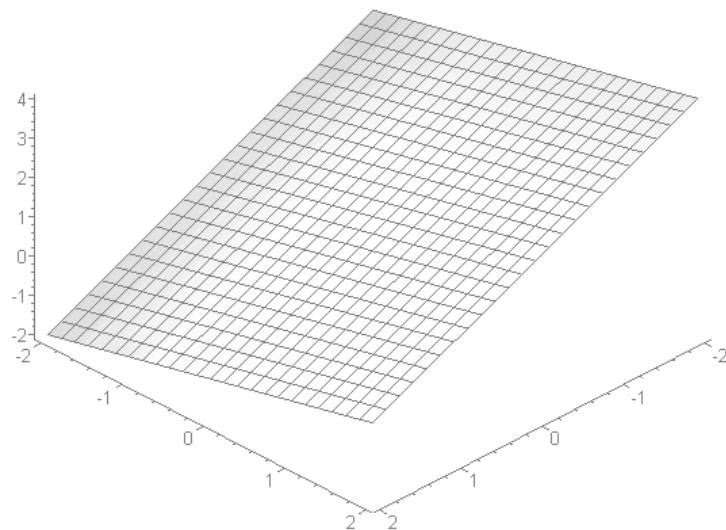


paraboloïde: $z = x^2 + y^2$

domaine: \mathbb{R}^2

image: $[0, +\infty)$

minimum atteint en $(x, y) = (0, 0)$

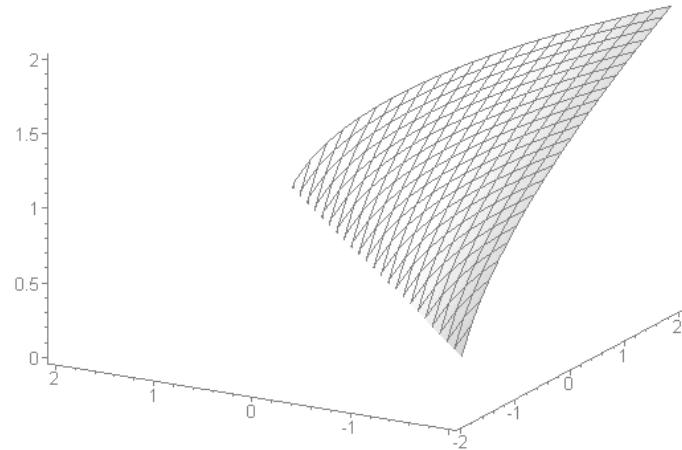


plan: $z = \frac{1}{2}y - x + 1$

domaine: \mathbb{R}^2

image: \mathbb{R}

aucun min/max

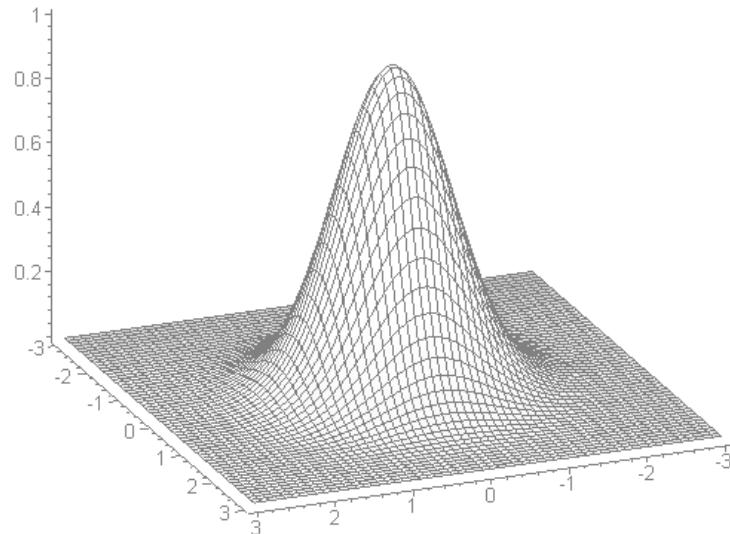


surface: $z = \sqrt{x - y}$

domaine: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

image: $[0, +\infty)$

minimum atteint sur la droite $y = x$



surface: $z = e^{-(x^2+y^2)}$

domaine: \mathbb{R}^2

image: $(0, 1]$

maximum atteint en $(x, y) = (0, 0)$

10.2 – Les dérivées partielles

Rappel: soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la dérivée de f en x est

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

si cette limite existe – la variable indépendante varie de x à $x + h$ dans le quotient différentiel.

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il y a beaucoup plus de jeu: on peut faire varier n'importe quelle combinaison de variables indépendantes dans le quotient différentiel.

Lorsque $n \geq 2$, une fonction peut avoir une infinité de **dérivées directionnelles** en un point (une dans chaque direction, en fait); ce n'est définitivement pas le cas lorsque $n = 1$.

Nous n'abordons pas ce sujet fondamental de la théorie du calcul multivariables, à une exception près.

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. La **dérivée partielle** de f par rapport à x_i est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

tant que cette limite existe; il se trouve que f_{x_i} est la dérivée directionnelle de f en direction de l'axe x_i .

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(x, y)$, si $f(x, y) = x^2y$;

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(x, y)$, si $f(x, y) = x^2y$;

Solution: en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2y - x^2y}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y((x + h)^2 - x^2)}{h} = y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\
 &= y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
 &= y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2xy.
 \end{aligned}$$

2. $g_y(x, y)$, si $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

$$2. \ g_y(x, y), \text{ si } g(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Solution: en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned} g_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x, y + h) - g(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{y+h} - \frac{x}{y}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{xh}{(y+h)y} - \frac{x}{y}}{h} \\ &= -x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(y + h)yh} \\ &= -x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(y + h)y} = -x \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

⚠ Lorsque l'on dérive par rapport à une variable, on peut se servir des règles du chapitre 5, tant que l'on traîte toutes les autres variables comme des constantes.

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(3, 1)$, si $f(x, y) = (x - 1)^2 y$;

2. $g_y(1, 1)$, si $g(x, y) = x/y$;

3. $h_x(x, y)$, si $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$; 4. $h_y(0, 0)$, si $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$;

5. $k_y(x, y)$, si $k(x, y) = x \ln(xy)$; 6. $k_x(-1, -1)$, si $k(x, y) = x \ln(xy)$.

Solutions: on utilise les règles des chapitres précédents.

1. Puisque nous dérivons par rapport à x , y est une constante. Ainsi

$$f_x(x, y) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} ((x - 1)^2) = y(2(x - 1)) = 2(x - 1)y$$

et $f_x(3, 1) = 2(3 - 1)(1) = 4$.

2. Puisque nous dérivons par rapport à y , x est une constante. Ainsi

$$g_y(x, y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y}\right) = x \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

et $g_y(1, 1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

3. Puisque nous dérivons par rapport à x , y est une constante. Ainsi

$$h_x(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-(x^2 + y^2)) = e^{-(x^2+y^2)}(-2x+0) = -2xe^{-(x^2+y^2)}.$$

4. Puisque nous dérivons par rapport à y , x est une constante. Ainsi

$$h_y(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(-(x^2 + y^2)) = e^{-(x^2+y^2)}(0-2y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

et $h_y(0, 0) = -2(0)e^{-(0^2+0^2)} = 0$.

5. Puisque nous dérivons par rapport à y , x est une constante. Ainsi

$$k_y(x, y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{x}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}.$$

6. Puisque nous dérivons par rapport à y , y est une constante. Ainsi

$$\begin{aligned} k_y(x, y) &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\ln(xy)) + \frac{\partial}{\partial x} (x) \cdot \ln(xy) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + 1 \cdot \ln(xy) \\ &= \frac{x}{xy} \cdot y + \ln(xy) = 1 + \ln(xy) \end{aligned}$$

et $k_x(-1, -1) = 1 + \ln((-1)(-1)) = 1 + \ln 1 = 1$.

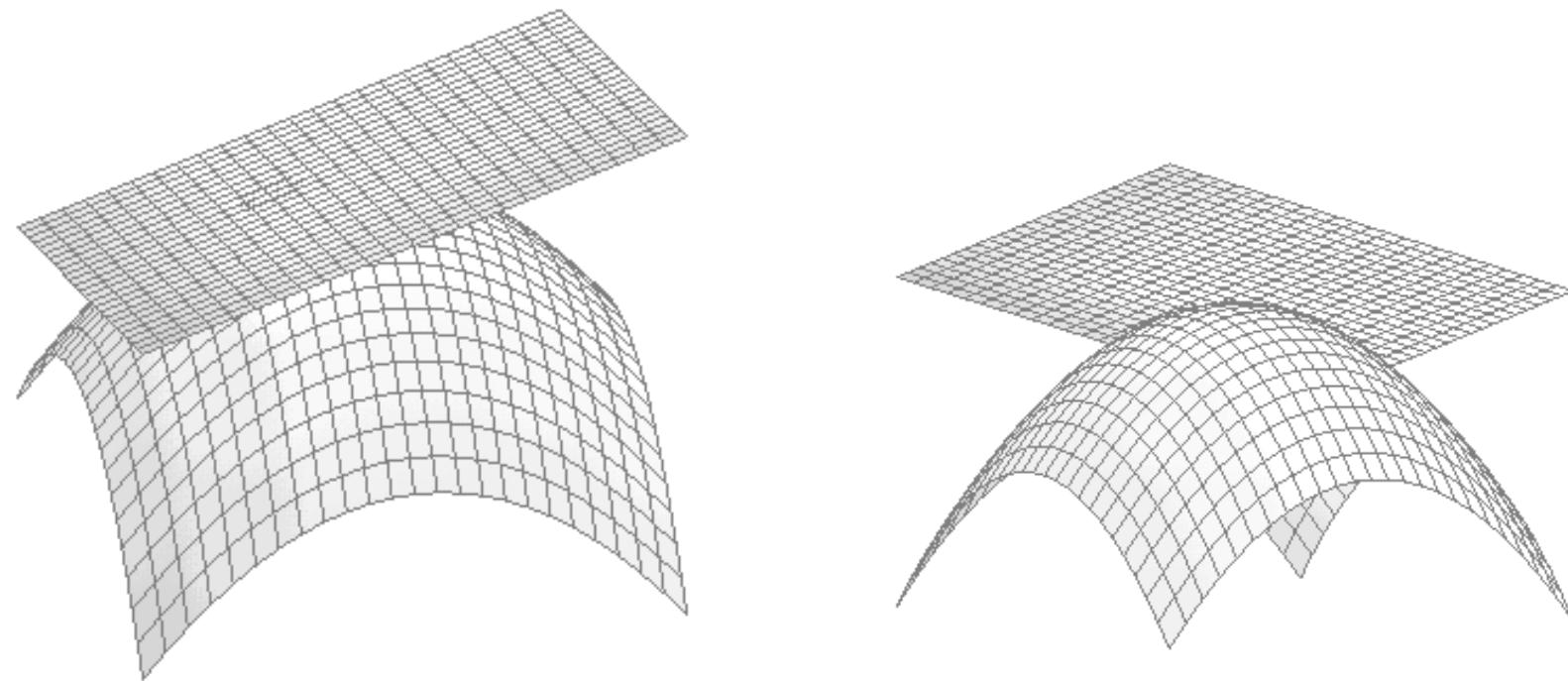
10.3 – Le plan tangent

On a vu au chapitre 5 que l'équation de l'unique droite tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a), \quad \text{si } f'(a) \text{ existe.}$$

En général, la surface $z = f(x, y)$ possède une infinité de droite tangente au point $P(a, b, f(a, b))$; toutes ces droites se retrouvent dans un même plan, le **plan tangent** à la surface définie par $z = f(x, y)$ au point $P(a, b, f(a, b))$.

C'est le plan qui repose sur la surface en ne la touchant qu'au **point de tangence**. Si un tel plan existe et que les dérivées partielles sont définies, la surface est **dérivable** ou **différentiable** en $P(a, b, f(a, b))$.



Près du point de tangence, la surface ressemble au plan tangent: c'est en partie pourquoi il y a encore des zozos pour croire que la Terre est plate!

Soit $z = f(x, y)$ une surface dérivable en $P(a, b, f(a, b))$. L'équation du plan tangent à la surface au point P est

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Exemples: déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(a, b, f(a, b))$ dans les cas suivants.

$$1. \quad f(x, y) = -1 + x^2 + y^2, \quad P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$2. \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad P(1, 0, e^{-1});$$

$$3. \quad f(x, y) = \sqrt{x - y}, \quad P(2, 1, 1);$$

$$4. \quad f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P(0, 1, 1).$$

Solutions: on utilise directement la formule.

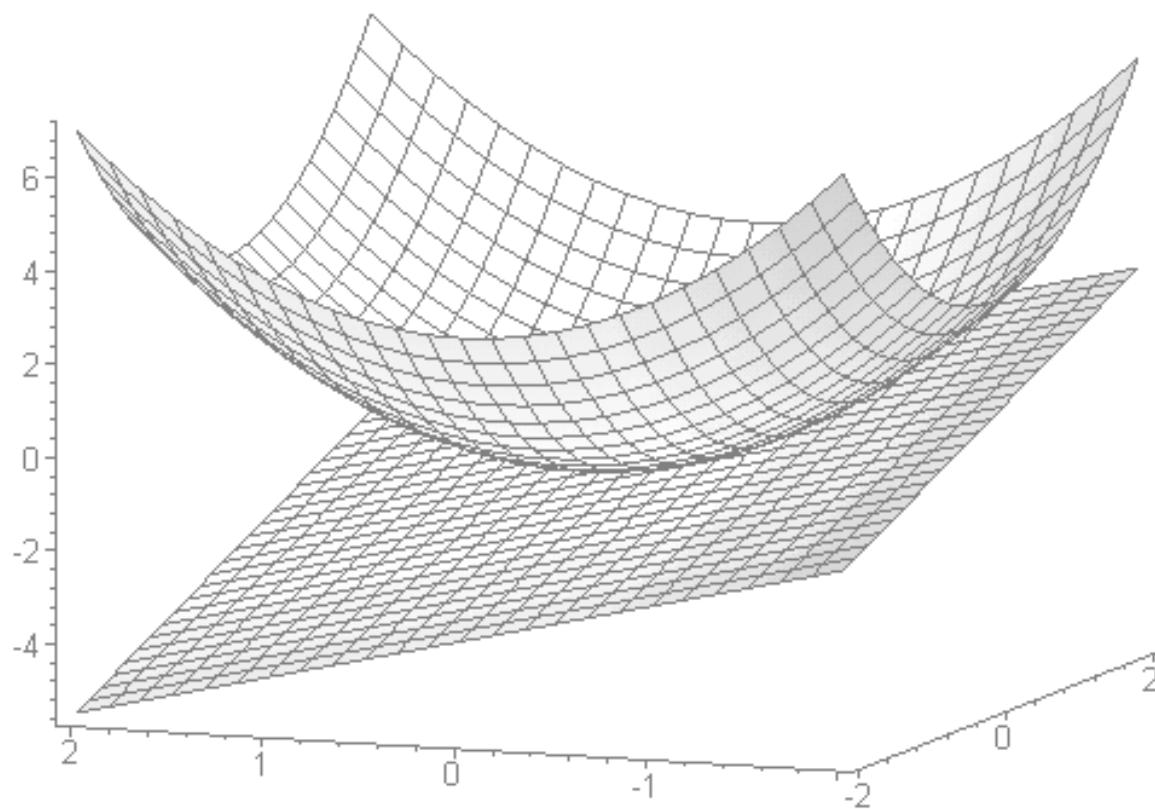
1. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = -1 + a^2 + b^2 = -\frac{1}{2}$, ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P :

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 + 2x + 0 = 2x \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = 0 + 0 + 2y = 2y \implies \\ f_x(a, b) &= f_x\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \end{aligned}$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + f_x\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{2}) + f_y\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)(y + \frac{1}{2}) \\ &= -\frac{1}{2} + 1(x - \frac{1}{2}) - 1(y + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + x - y. \end{aligned}$$



2. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 1$ et $b = 0$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = e^{-(a^2+b^2)} = e^{-1}$, ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P :

$$f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(1, 0) = -2(1)e^{-(1^2+0^2)} = -2e^{-1} \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(1, 0) = 0,$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= e^{-1} - 2e^{-1} \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) = e^{-1}(3 - 2x). \end{aligned}$$

3. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 2$ et $b = 1$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = \sqrt{a - b} = 1$, ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P :

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(2, 1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-1}} = -\frac{1}{2},$$

et l'équation du plan tangent est

$$z = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) = \frac{1}{2}(1 + x - y).$$

4. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 0$ et $b = 1$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles:

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(0, 1) = 0 \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(0, 1) = -1,$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(0, 1) + f_x(0, 1)(x - 0) + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= 1 + 0 \cdot (x - 0) - 1(y - 1) = 2 - y. \end{aligned}$$

10.4 – L'optimisation à deux variables

Les **points critiques** de $f(x, y)$ sont les paires $(a, b) \in D_f$ telles que

1. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, ou
2. au moins une des dérivées partielles $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ n'existe pas.

Exemples: déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x, y) = x + y;$ | 3. $f(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)};$ |
| 2. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2};$ | 4. $f(x, y) = (x - 1)^2y.$ |

Solutions:

1. Puisque $f_x(x, y) = 1$ et $f_y(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ n'a pas de point critique.
2. Puisque $f_x(x, y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$ et $f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f(x, y)$ n'a pas de point critique. **Note:** $(0, 0) \notin D_f$; ce n'est donc pas un point critique.
3. Puisque $f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$ et $f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$, $f(x, y)$ n'admet qu'un point critique, en $(0, 0)$.
4. Puisque $f_x(x, y) = 2(x - 1)y$ et $f_y(x, y) = (x - 1)^2$, $f(x, y)$ admet des points critiques en $(1, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Une fonction $f(x, y)$ est **dérivable d'ordre deux** en $(x, y) = (a, b)$ si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

existent lorsque $(x, y) = (a, b)$.

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

- | | |
|--|--|
| 1. $f_{xy}(3, 1)$, si $f(x, y) = (x - 1)^2 y$; | 3. $k_{xy}(x, y)$, si $k(x, y) = x \ln(xy)$; |
| 2. $g_{yy}(1, 1)$, si $g(x, y) = \frac{x}{y}$; | 4. $k_{yx}(x, y)$, si $k(x, y) = x \ln(xy)$. |

Solutions: on utilise les résultats des exemples en pp. 22-25.

1. Puisque $f_x(x, y) = 2(x - 1)y$, alors $f_{xy}(x, y) = 2(x - 1)$ et

$$f_{xy}(3, 1) = 2(3 - 1) = 4.$$

2. Puisque $g_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$, alors $g_{yy}(x, y) = \frac{2x}{y^3}$ et $g_{yy}(1, 1) = \frac{2(1)}{1^3} = 2$.

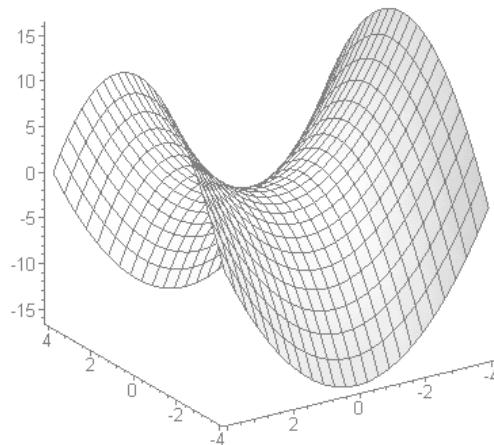
3. Puisque $k_x(x, y) = 1 + \ln(xy)$, alors

$$k_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) + 0 = \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (xy) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}.$$

4. Puisque $k_y(x, y) = \frac{x}{y}$, alors $k_{yx}(x, y) = \frac{1}{y}$.

⚠ Dans ce qui précède, on voit que $k_{xy} = k_{yx}$. Les dérivées mixtes ne sont pas toujours égales, mais elles le sont pour plusieurs fonctions. Dans cette section, on suppose que c'est le cas.

Soit (a, b) un point critique de f . Si $f(x, y)$ n'atteint pas un maximum ou un minimum relatif en (a, b) , le point critique (a, b) est un **point de selle** de $f(x, y)$; c'est l'analogue multi-dimensionnel du point d'inflexion.



Dans certains cas, le **théorème de la dérivée seconde** nous permet d'identifier si une fonction admet un minimum relatif, un maximum relatif, ou encore un point de selle en ses points critiques.

Théorème: soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable d'ordre 2 et (a, b) un de ses points critiques. Supposons que

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 \neq 0$$

- Si $D > 0$ et $f_{xx}(a, b) > 0$, alors f atteint un min. relatif au point (a, b) .
- Si $D > 0$ et $f_{xx}(a, b) < 0$, alors f atteint un max. relatif au point (a, b) .
- Si $D < 0$, alors (a, b) est un point de selle de f .

Exemples: classifier les points critiques des fonctions suivantes.

$$1. \ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1;$$

$$2. \ g(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$3. \ h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)};$$

$$4. \ k(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solutions: on utilise le théorème de la dérivée seconde et divers résultats obtenus lors des exemples de ce chapitre.

1. Le point $(0, 0)$ est le seul point critique de $f(x, y)$. Puisque

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad f_{xy}(x, y) = 0,$$

alors $D = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$; comme $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, $f(x, y)$ atteint un minimum relatif à $(0, 0)$.

2. Le point $(0, 0)$ est le seul point critique de $g(x, y)$. Puisque

$$g_{xx}(x, y) = 2, \quad g_{yy}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad g_{xy}(x, y) = 0,$$

alors $D = g_{xx}(0, 0)g_{yy}(0, 0) - (g_{xy}(0, 0))^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$; ainsi $(0, 0)$ est un point de selle de $g(x, y)$.

3. Le point $(0, 0)$ est le seul point critique de $h(x, y)$.

Puisque $h_{xy}(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$,

$$h_{xx}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 - 1) \quad \text{et} \quad h_{yy}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2 - 1),$$

alors

$$D = h_{xx}(0, 0)h_{yy}(0, 0) - (h_{xy}(0, 0))^2 = (2e^0(2(0) - 1))^2 - 0^2 = 4 > 0;$$

comme $h_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, $h(x, y)$ atteint un maximum relatif à $(0, 0)$.

4. Le théorème de la dérivée seconde ne peut être utilisé dans ce cas puisque les dérivées partielles de $k(x, y)$ ne sont pas définies au point critique $(0, 0)$ (c'est un maximum absolu, soit dit en passant).

Il existe également un résultant nous permettant d'identifier les valeurs extrêmes d'une fonction sur une région (compacte); c'est la généralisation de la marche à suivre du chapitre 6.

Théorème: soient $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et A une région bornée du plan s'exprimant à l'aide d'inégalités de type \leq . Alors, les valeurs extrêmes de f sont atteintes soit en un point critique $(x_*, y_*) \in A$, soit sur la frontière ∂A .

On optimise donc f en trouvant tous les points critiques dans A , en évaluant f en ces points, et en évaluant f sur la frontière.

Exemple (reprise): la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y \leq 3,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

Exemple (reprise): la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y \leq 3,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

Solution: on cherche à maximiser $f(x, y)$, lorsque $0 \leq x, y \leq 3$. Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 16y - 4x^3, & f_y(x, y) &= 16x - 4y^3, \\ f_{xx}(x, y) &= -12x^2, & f_{yy}(x, y) &= -12y^2, & f_{xy}(x, y) &= 16. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques de f satisfont donc à $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, c'est-à-dire à

$$16y - 4x^3 = 0 \quad \text{et} \quad 16x - 4y^3 = 0.$$

Soit (x, y) un tel point. Alors $16x - 4y^3 = 0$, d'où $x = \frac{1}{4}y^3$. Puisque les deux équations doivent être satisfaites simultanément, on obtient

$$16y - 4x^3 = 16y - 4 \left(\frac{1}{4}y^3 \right)^3 = 16y - \frac{1}{16}y^9 = \frac{1}{16}y(256 - y^8) = 0.$$

Ainsi, $y = 0$ ou $y^8 - 256 = 0$. Mais

$$y^8 - 256 = (y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)(y^4 + 16),$$

d'où $y = 0, \pm 2$. Puisque y doit être non-négatif, on rejette $y = -2$.

Lorsque $y = 2$, $x = \frac{1}{4}2^3 = 2$; lorsque $y = 0$, $x = \frac{1}{4}0^3 = 0$. Les seul points critiques d'intérêt se retrouvent donc en $(x, y) = (0, 0)$ et $(2, 2)$.

Selon le théorème de la dérivée seconde,

$$D = f_{xx}(2, 2)f_{yy}(2, 2) - (f_{xy}(2, 2))^2 = (-12(2)^2)^2 - 16^2 = 2048 > 0$$

et $f_{xx}(2, 2) = -12(2)^2 - 48 < 0$, d'où $f(x, y)$ admet un maximum relatif à $(2, 2)$; on a aussi $D(0, 0) = 0 \cdot 0 - 16^2 < 0$, d'où $(0, 0)$ est un point de selle.

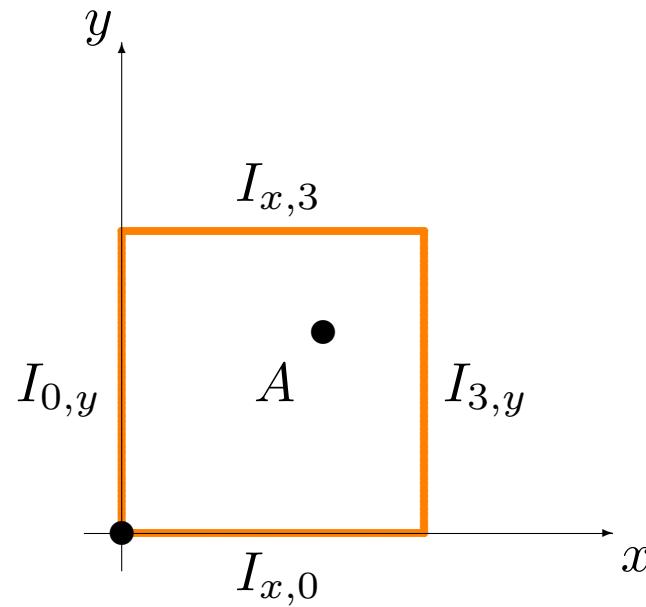
⚠ Si la fonction n'avait qu'un point critique en $(2, 2)$, on pourrait directement conclure que Cie. Inc. maximise ses profits si elle vend 2000 gugusses et 2000 gogosses par mois.

⚠ Mais il y a plus d'un point critique: on doit alors aussi vérifier ce que si passe sur la frontière du domaine.

Puisque $A = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 3\}$, la frontière ∂A consiste en 4 segments

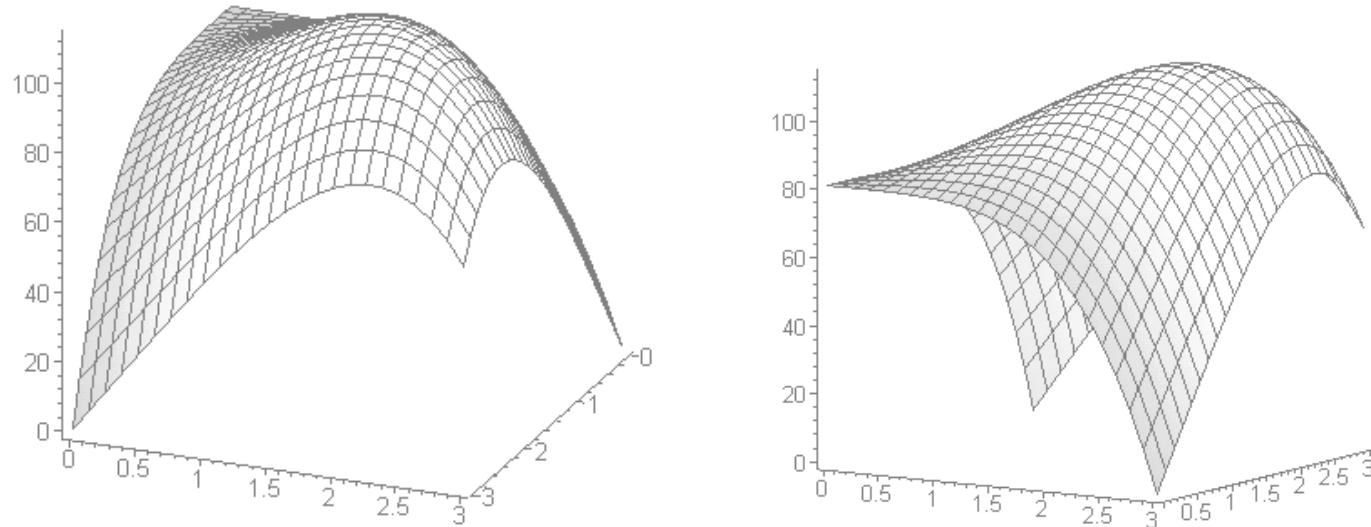
$$I_{x,0} = \{(x, 0); 0 \leq x \leq 3\}, I_{x,3} = \{(x, 3); 0 \leq x \leq 3\},$$

$$I_{0,y} = \{(0, y); 0 \leq y \leq 3\}, I_{3,y} = \{(3, y); 0 \leq y \leq 3\}.$$



- En $(x, y) = (2, 2)$, f prend la valeur $81 + 16(2)(2) - 2^4 - 2^4 = 113$, en $(x, y) = (0, 0)$, f prend la valeur $81 + 16(0)(0) - 0^4 - 0^4 = 81$;
- sur $I_{x,0}$, la fonction devient $f(x, 0) = 81 + 16x \cdot (0) - x^4 - 0^4 = 81 - x^4$, pour $0 \leq x \leq 3 \implies$ valeur maximale est 81;
- sur $I_{x,3}$, la fonction devient $f(x, 3) = 81 + 16x \cdot (3) - x^4 - 3^4 = 48x - x^4$, pour $0 \leq x \leq 3 \implies$ valeur maximale est ≈ 82.42 (scénario 6);
- sur $I_{0,y}$, la fonction devient $f(0, y) = 81 + 16y \cdot (0) - 0^4 - y^4 = 81 - y^4$, pour $0 \leq y \leq 3 \implies$ valeur maximale est 81;
- sur $I_{3,y}$, la fonction devient $f(3, y) = 81 + 16y \cdot (3) - 3^4 - y^4 = 48y - y^4$, pour $0 \leq y \leq 3 \implies$ valeur maximale est ≈ 82.42 (scénario 6);.

La valeur maximale globale (113) est obtenue en $(2, 2)$.



On a sacrifié plusieurs aspects importants de la théorie et des applications dans cette brève introduction, afin de vous donner un avant-gout du calcul multi-variables; vous aurez la chance d'approfondir vos connaissances dans le cadre d'un cours subséquent.

Résumé

Exercices suggérés