

# **MAT 1700**

## **Méthodes mathématiques I**

### **Chapitre 10**

### **Les fondements du calcul à plusieurs variables**

P. Boily, F. Fotso (uOttawa)

Session d'automne – 2020

Session d'hiver – 2021

Le calcul dans la joie (Boily et Hart)

## Aperçu

Scénario – Les gugusses et les gogosses (p.2)

10.1 – Les fonctions de plusieurs variables (p.8)

10.2 – Les dérivées partielles (p.18)

10.3 – Le plan tangent (p.26)

10.4 – L'optimisation à deux variables (p.34)

Résumé (p.50)

Exercices suggérés (p.51)

## Scénario – Les gugusses et les gogosses

**Exemple:** la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés (en milliers de dollars) par l'expression

$$81 + 16xy - x^4 - y^4,$$


où  $x$  et  $y$  représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Combien d'article de chaque sorte doit-elle vendre afin de maximiser ses profits, si la vente de chaque article ne peut dépasser 3000 unités par mois?

**Solution:** on cherche à maximiser la fonction

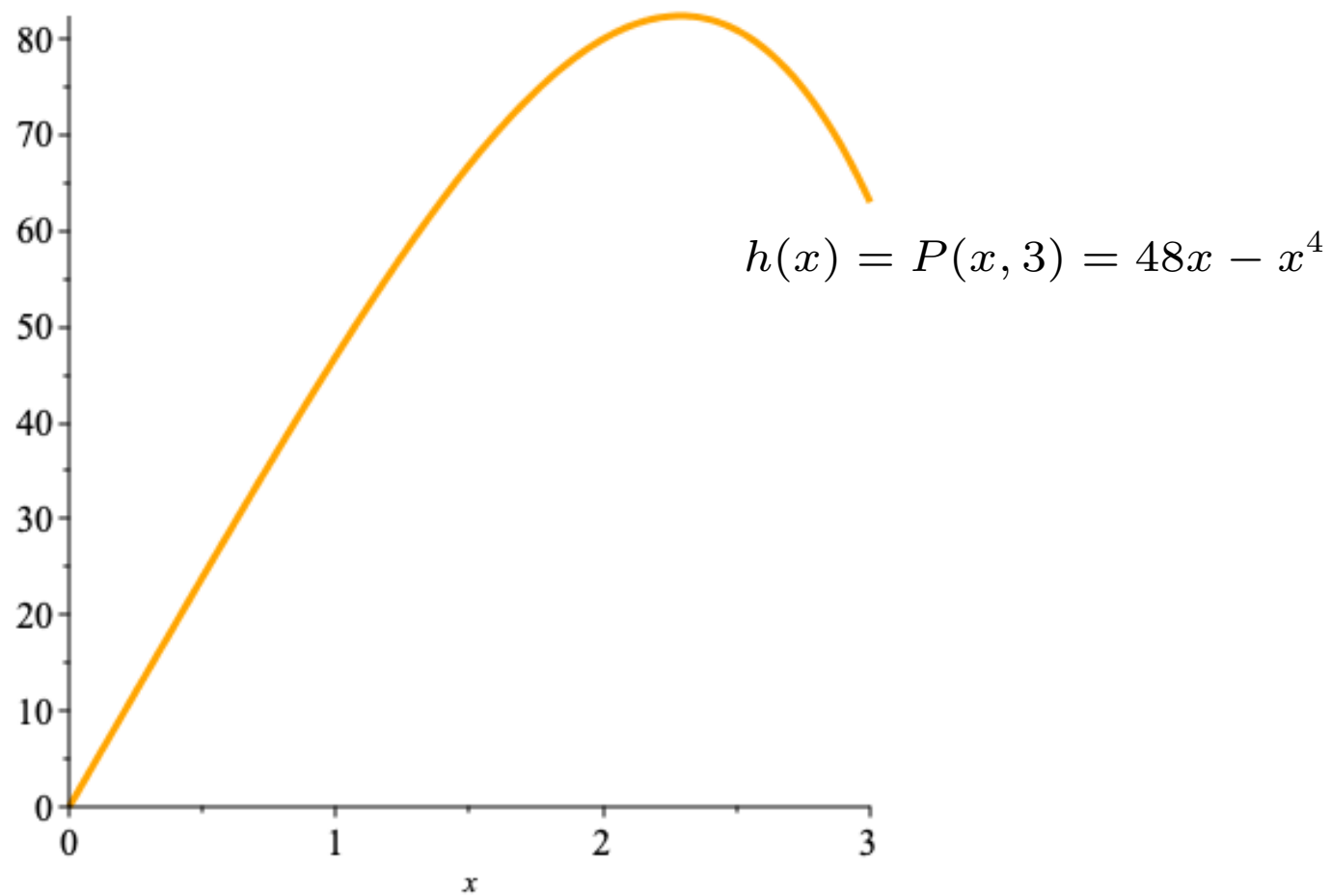
$$P = P(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4,$$

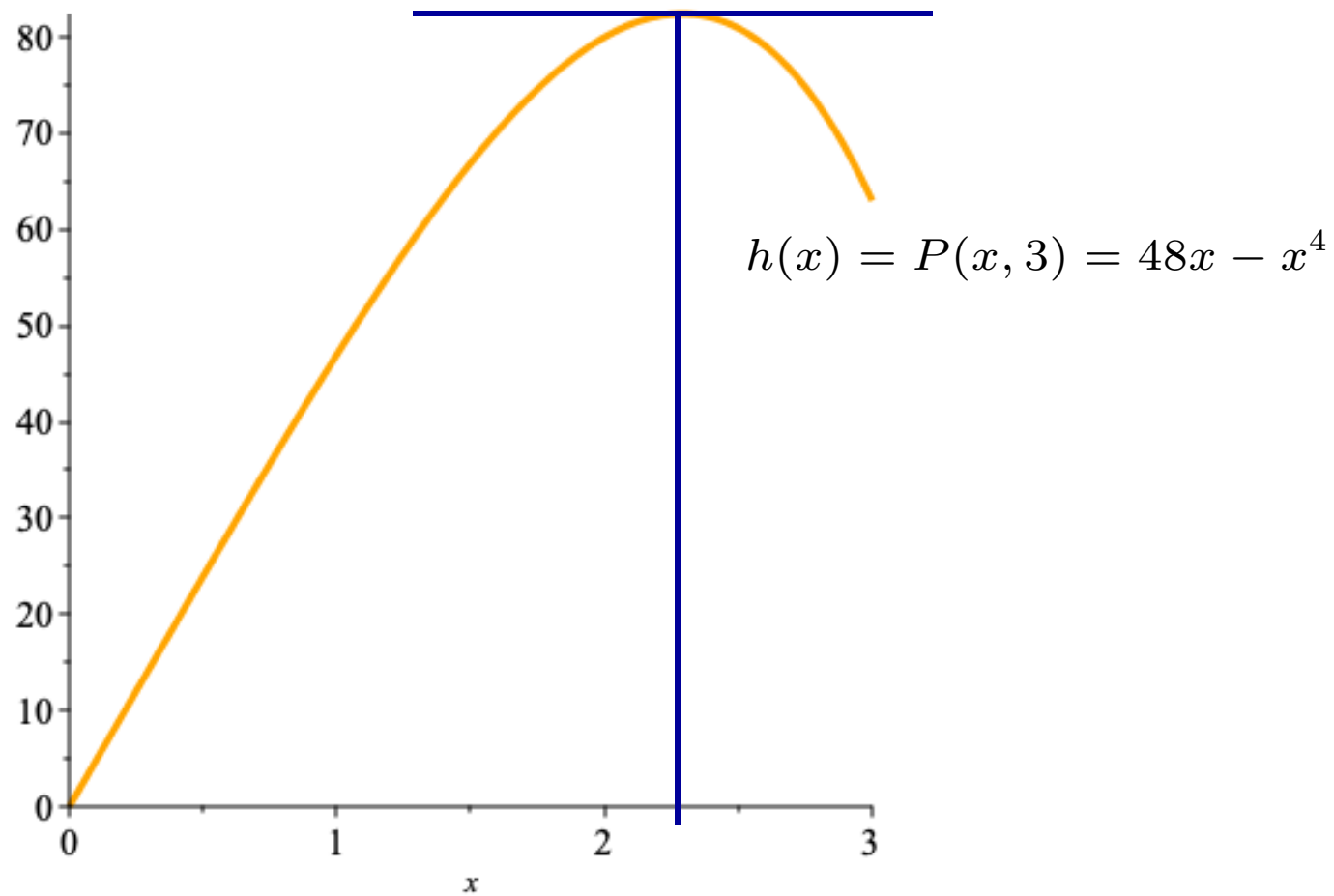
soumise aux restrictions  $0 \leq x \leq 3$  and  $0 \leq y \leq 3$ .

 **La marche à suivre présentée au chapitre 6 ne peut-être utilisée directement puisque les ventes de gugusses et de gogosse ne sont pas reliées: il est donc impossible d'éliminer une des variables.**

Si *Cie. Inc.* s'attend à vendre 3000 gogosses ( $y = 3$  est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$h(x) = P(x, 3) = 81 + 16 \cdot 3x - 3^4 - x^4 = 48x - x^4.$$





Puisque  $h'(x) = 48 - 4x^3$ , le seul point critique de  $h(x)$  est  $x = 12^{1/3} \approx 2.29$ . On ajoute les bornes  $x = 0$  et  $x = 3$ , et on obtient le tableau suivant:

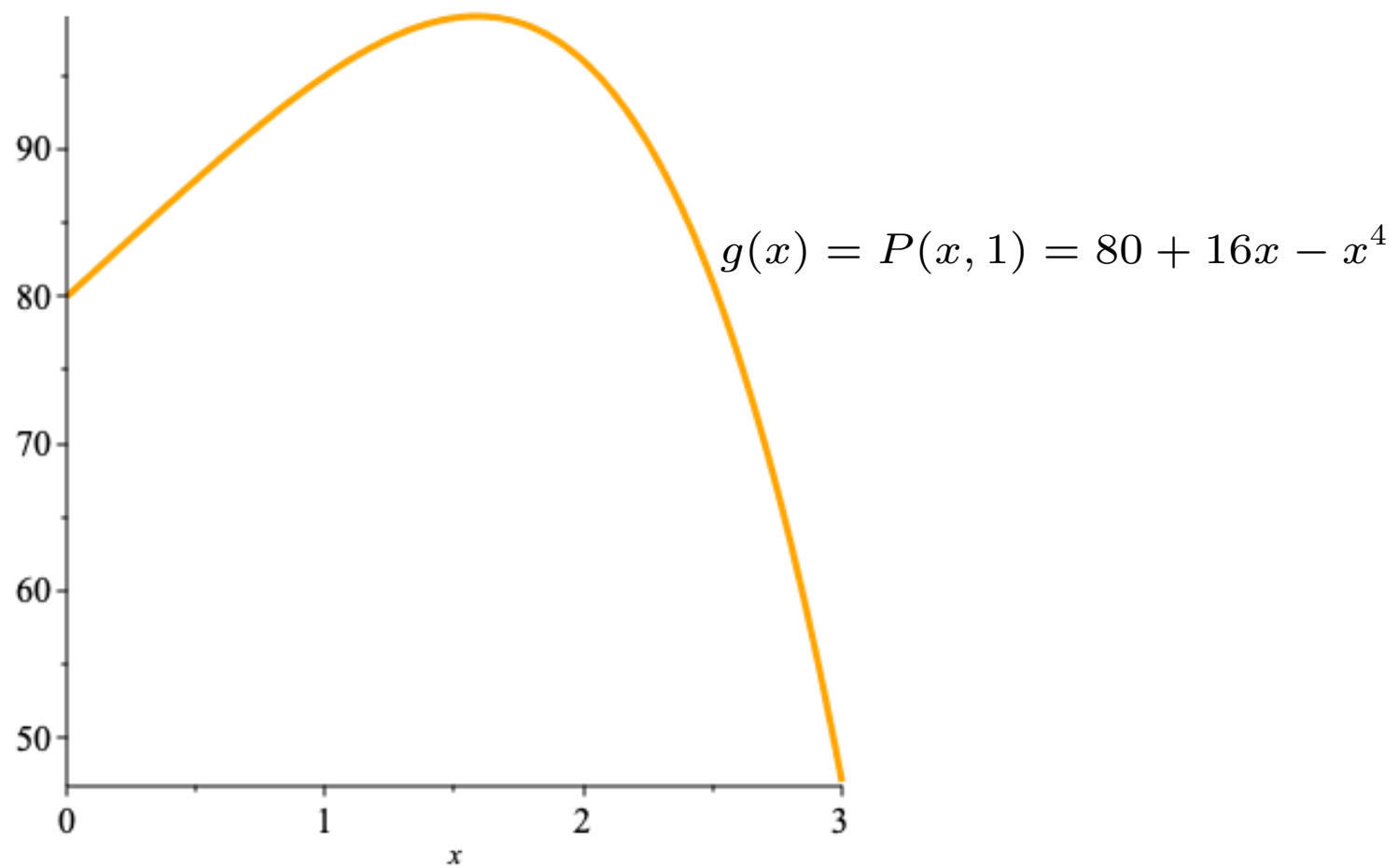
$x$	0	$12^{1/3}$	3
$h(x)$	0	$\approx 82.42$	63

Ainsi,  $h$  admet un maximum en  $x = 12^{1/3} \approx 2.29$ .

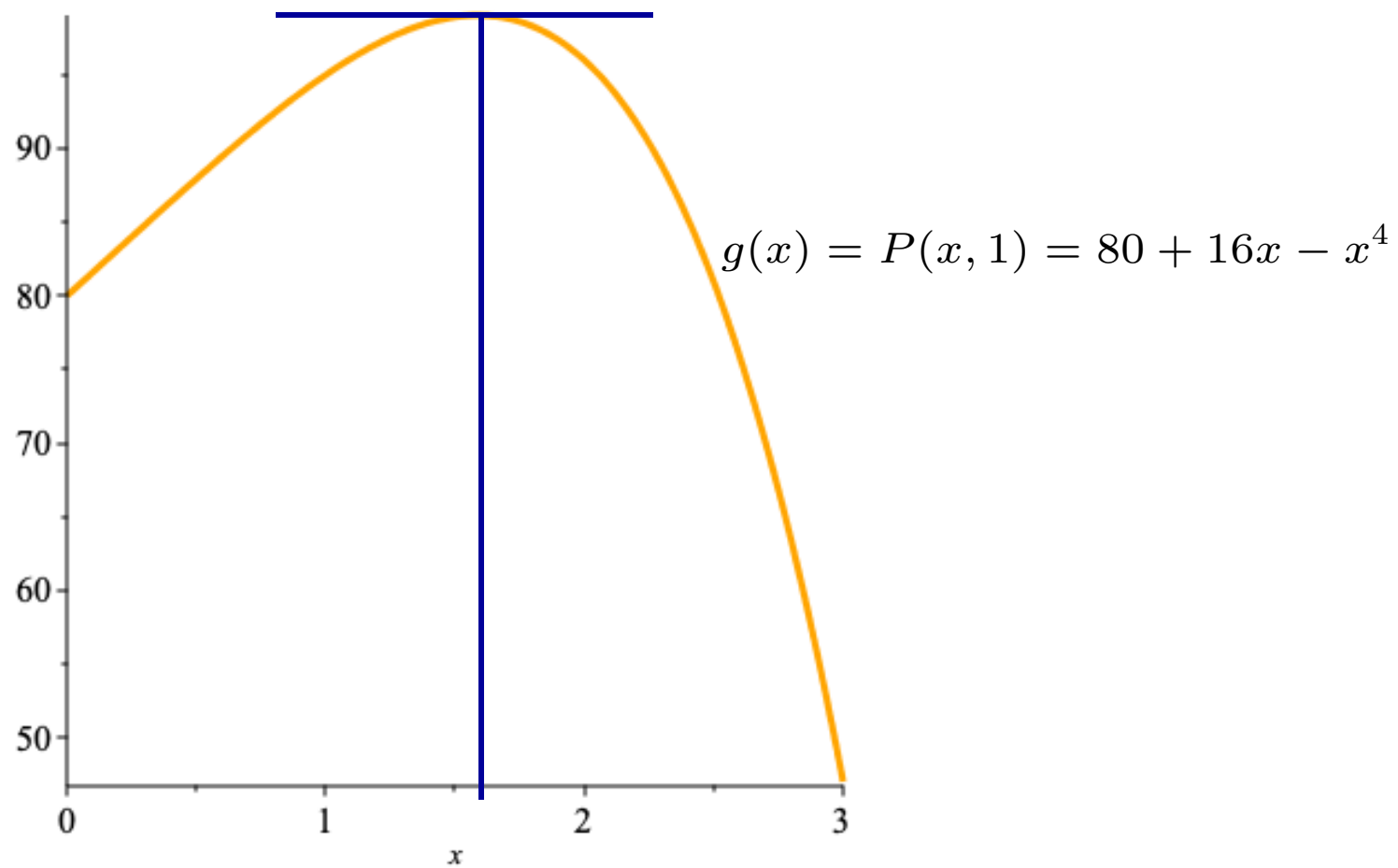
Est-ce que c'est aussi un maximum de  $P$ ?

Si, au lieu, *Cie. Inc.* s'attend à vendre 1000 gogosses ( $y = 1$  est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$g(x) = P(x, 1) = 81 + 16x - 1 - x^4 = 80 + 16x - x^4.$$







Puisque  $g'(x) = 16 - 4x^3$ , le seul point critique de  $g(x)$  est  $x = 4^{1/3} \approx 1.59$ . On ajoute les bornes  $x = 0$  et  $x = 3$ , et on obtient le tableau suivant:

$x$	0	$4^{1/3}$	3
$g(x)$	80	$\approx 99.05$	47

Ainsi,  $g(x)$  admet un maximum en  $x = 4^{1/3} \approx 1.59$ .

Puisque  $P(4^{1/3}, 1) > P(12^{1/3}, 3)$ ,  $P$  n'atteint pas sa valeur maximale lorsque  $x = 12^{1/3}$  et  $y = 3$ .

**⚠ Il est tentant d'en conclure que le maximum est alors atteint en  $x = 4^{1/3}$  et  $y = 1$ , mais on peut s'imaginer choisir un autre  $y$ , et trouver un maximum encore plus élevé.**

Nous ne sommes donc pas encore en mesure de répondre à la question. Nous y reviendrons.

## 10.1 – Les fonctions de plusieurs variables

En général, une quantité d'intérêt est affectée par plus d'une variable: le prix d'une maison, par exemple, est fonction des taux d'intérêts, du temps de l'année, du quartier, etc.

On ne peut pas appliquer tels quels les concepts du calcul à une variable (cf. scénario au début du chapitre).

Si  $n \in \mathbb{N}^\times$ ,  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des  $n$ —**tuples de nombres réels**:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

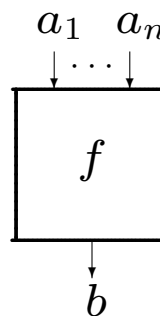
Ainsi  $\mathbb{R}^1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$  représente une **droite**,  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  un **plan**,  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  l'**espace à 3 dimensions**, etc.

Une **fonction de  $n$  variables** est une règle associant un nombre unique à chaque élément de  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :

- l'ensemble des points où la fonction est bien définie est son **domaine**  $D_f$ ;
- l'ensemble des valeurs que prend la fonction est son **image**  $I_f$ .

Si  $f : A \rightarrow B$  est fonction de  $n$  variables, on dénote sa règle par

$$b = f(a_1, \dots, a_n) \quad \text{ou}$$



**Exemples:** considérons les fonctions à 2 variables suivantes.

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ :

- $D_f = \mathbb{R}^2$ , puisque  $x + y$  existe pour toute paire  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- $I_f = \mathbb{R}$ , puisque  $f(x, 0) = x + 0 = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

2.  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \sqrt{x - y}$ :

- $D_g = \{(x, y) | x - y \geq 0\}$ , puisque  $\sqrt{x - y}$  n'existe que si  $x - y \geq 0$ ;
- $I_g = [0, +\infty)$ , puisque  $g(x^2, 0) = \sqrt{x^2 - 0} = x$  pour tout  $x \geq 0$ .

3.  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ :

- $D_h = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ , puisque  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  existe si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;
- $I_h = (0, +\infty)$ , puisque  $h(x^{-1/2}, 0) = \frac{1}{(x^{-1/2})^2 + 0} = x$  pour tout  $x > 0$ .

4.  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$ :

- $D_k = \mathbb{R}^2$ , puisque  $e^{-(x^2+y^2)}$  existe pour toute paire  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- $I_k = [-1, 0)$ , puisque  $0 < e^{-\mu} \leq 1$  pour tout  $\mu = x^2 + y^2 \geq 0$ .

La différence conceptuelle entre  $n = 1$  et  $n = 2$  est beaucoup plus prononcée que celle entre  $n = 2$  et  $n > 2$ . Pour cette raison, on se concentre sur les fonctions à 2 variables.

Le graphique d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une courbe dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ; celle d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une surface dans  $\mathbb{R}^3$ :

$$z = f(x, y).$$

Les points de cette surface sont de la forme  $P(a, b, f(a, b))$ , où  $(a, b) \in D_f$ .

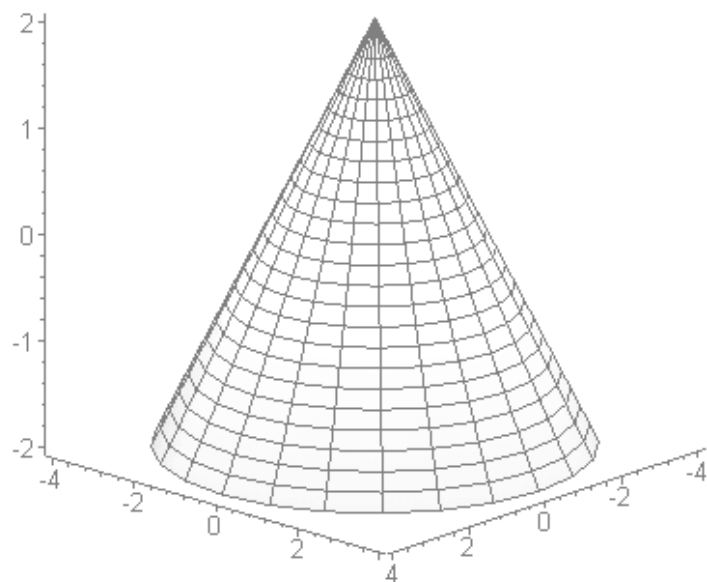
Par exemple, la surface définie par  $z = x^2 - y$  est l'ensemble

$$\{(x, y, x^2 - y) : x, y, \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi  $P(3, 1, 8)$  est sur la surface puisque  $3^2 - 1 = 8$ , tandis que  $Q(3, 1, -2)$  ne l'est pas puisque  $3^2 - 1 \neq -2$ .

 **Il n'est pas évident de tracer une surface à la main.**

**Exemples:** voici les graphiques de quelques surfaces  $z = f(x, y)$ , ainsi que les points saillants de ces dernières.



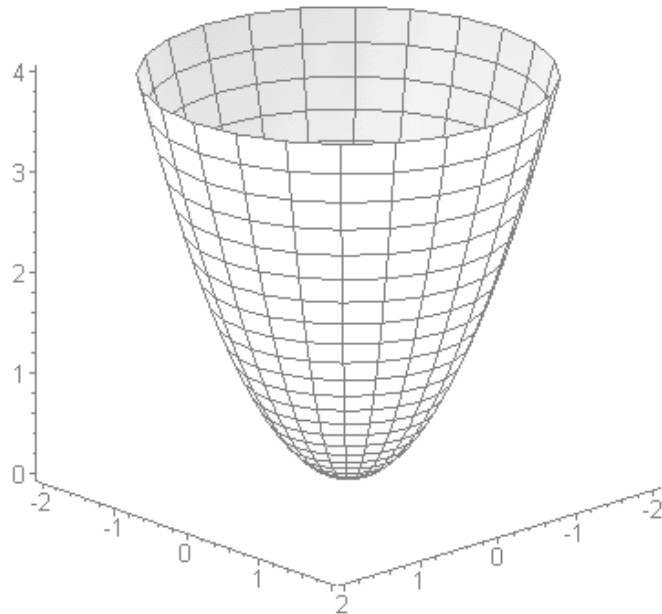
**cône:**  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

domaine:  $\mathbb{R}^2$

image:  $(-\infty, 2]$

maximum atteint en  $(x, y) = (0, 0)$



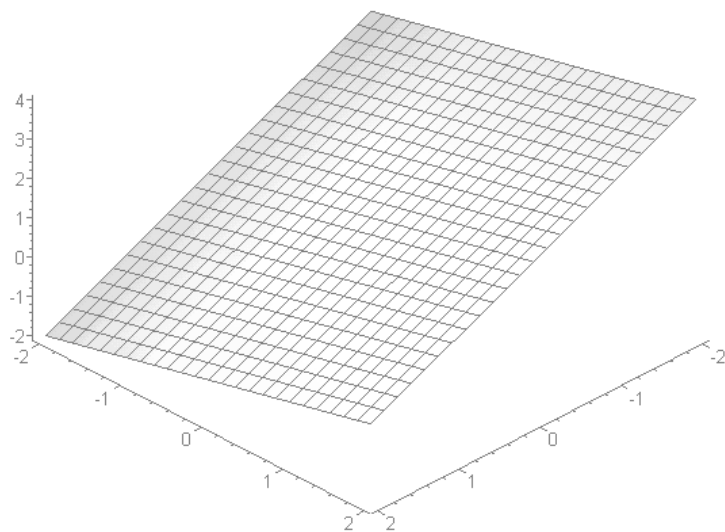


**paraboloïde:**  $z = x^2 + y^2$

domaine:  $\mathbb{R}^2$

image:  $[0, +\infty)$

minimum atteint en  $(x, y) = (0, 0)$

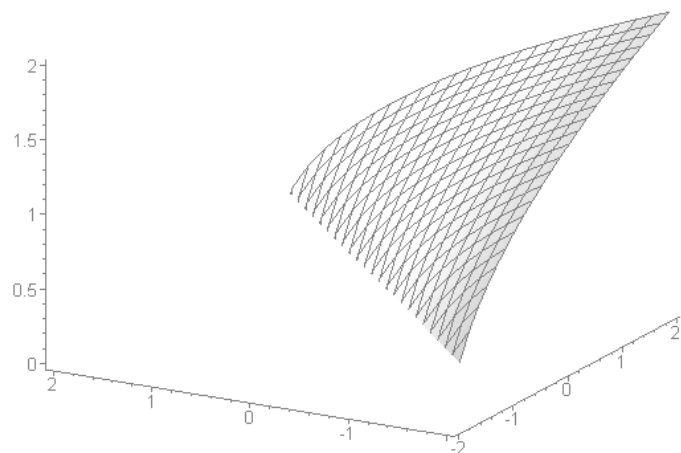


**plan:**  $z = \frac{1}{2}y - x + 1$

domaine:  $\mathbb{R}^2$

image:  $\mathbb{R}$

aucun min/max

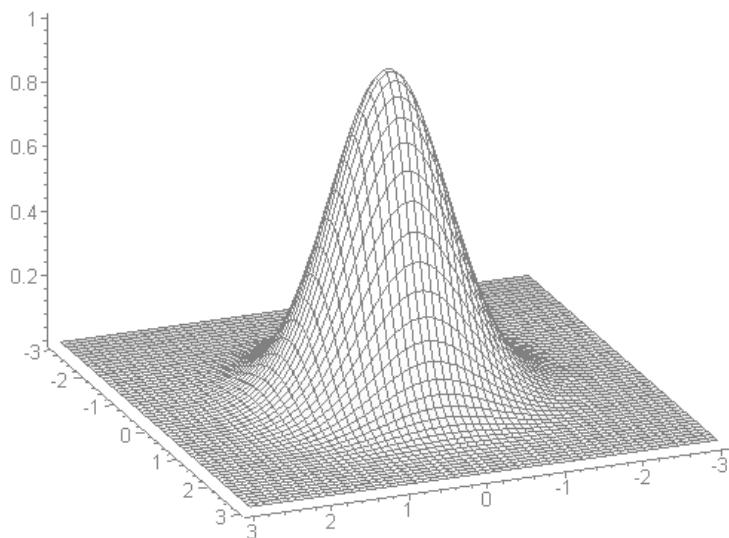


surface:  $z = \sqrt{x - y}$

domaine:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

image:  $[0, +\infty)$

minimum atteint sur la droite  $y = x$



surface:  $z = e^{-(x^2+y^2)}$

domaine:  $\mathbb{R}^2$

image:  $(0, 1]$

maximum atteint en  $(x, y) = (0, 0)$

## 10.2 – Les dérivées partielles

**Rappel:** soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'une variable. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la dérivée de  $f$  en  $x$  est

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si cette limite existe – la variable indépendante varie de  $x$  à  $x+h$  dans le quotient différentiel.

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il y a beaucoup plus de jeu: on peut faire varier n'importe quelle combinaison de variables indépendantes dans le quotient différentiel.

Lorsque  $n \geq 2$ , une fonction peut avoir une infinité de **dérivées directionnelles** en un point (une dans chaque direction, en fait); ce n'est définitivement pas le cas lorsque  $n = 1$ .

Nous n'abordons pas ce sujet fondamental de la théorie du calcul multi-variables, à une exception près.

Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ . La **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à  $x_i$  est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

tant que cette limite existe; il se trouve que  $f_{x_i}$  est la dérivée directionnelle de  $f$  en direction de l'axe  $x_i$ .

**Exemples:** déterminer les dérivées partielles indiquées.

1.  $f_x(x, y)$ , si  $f(x, y) = x^2y$ ;

**Exemples:** déterminer les dérivées partielles indiquées.

1.  $f_x(x, y)$ , si  $f(x, y) = x^2y$ ;

**Solution:** en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2y - x^2y}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y((x+h)^2 - x^2)}{h} = y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= y \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2xy. \end{aligned}$$




2.  $g_y(x, y)$ , si  $g(x, y) = \frac{x}{y}$ .

2.  $g_y(x, y)$ , si  $g(x, y) = \frac{x}{y}$ .

**Solution:** en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned} g_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x, y+h) - g(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{y+h} - \frac{x}{y}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{xh}{(y+h)y}}{h} \\ &= -x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(y+h)yh} \\ &= -x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(y+h)y} = -x \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

 **Lorsque l'on dérive par rapport à une variable, on peut se servir des règles du chapitre 5, tant que l'on traite toutes les autres variables comme des constantes.**

**Exemples:** déterminer les dérivées partielles indiquées.

1.  $f_x(3, 1)$ , si  $f(x, y) = (x - 1)^2 y$ ;

2.  $g_y(1, 1)$ , si  $g(x, y) = x/y$ ;

3.  $h_x(x, y)$ , si  $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ;

4.  $h_y(0, 0)$ , si  $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ;

5.  $k_y(x, y)$ , si  $k(x, y) = x \ln(xy)$ ;

6.  $k_x(-1, -1)$ , si  $k(x, y) = x \ln(xy)$ .

**Solutions:** on utilise les règles des chapitres précédents.

1. Puisque nous dérivons par rapport à  $x$ ,  $y$  est une constante. Ainsi

$$f_x(x, y) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} ((x - 1)^2) = y(2(x - 1)) = 2(x - 1)y$$

$$\text{et } f_x(3, 1) = 2(3 - 1)(1) = 4.$$

2. Puisque nous dérivons par rapport à  $y$ ,  $x$  est une constante. Ainsi

$$g_y(x, y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) = x \left( -\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\text{et } g_y(1, 1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

3. Puisque nous dérivons par rapport à  $x$ ,  $y$  est une constante. Ainsi

$$h_x(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-(x^2 + y^2)) = e^{-(x^2+y^2)} (-2x+0) = -2xe^{-(x^2+y^2)}.$$

4. Puisque nous dérivons par rapport à  $y$ ,  $x$  est une constante. Ainsi

$$h_y(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (-(x^2 + y^2)) = e^{-(x^2+y^2)} (0-2y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

$$\text{et } h_y(0, 0) = -2(0)e^{-(0^2+0^2)} = 0.$$

5. Puisque nous dérivons par rapport à  $y$ ,  $x$  est une constante. Ainsi

$$k_y(x, y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{x}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}.$$

6. Puisque nous dérivons par rapport à  $y$ ,  $y$  est une constante. Ainsi

$$\begin{aligned} k_y(x, y) &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\ln(xy)) + \frac{\partial}{\partial x} (x) \cdot \ln(xy) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + 1 \cdot \ln(xy) \\ &= \frac{x}{xy} \cdot y + \ln(xy) = 1 + \ln(xy) \end{aligned}$$

$$\text{et } k_x(-1, -1) = 1 + \ln((-1)(-1)) = 1 + \ln 1 = 1.$$

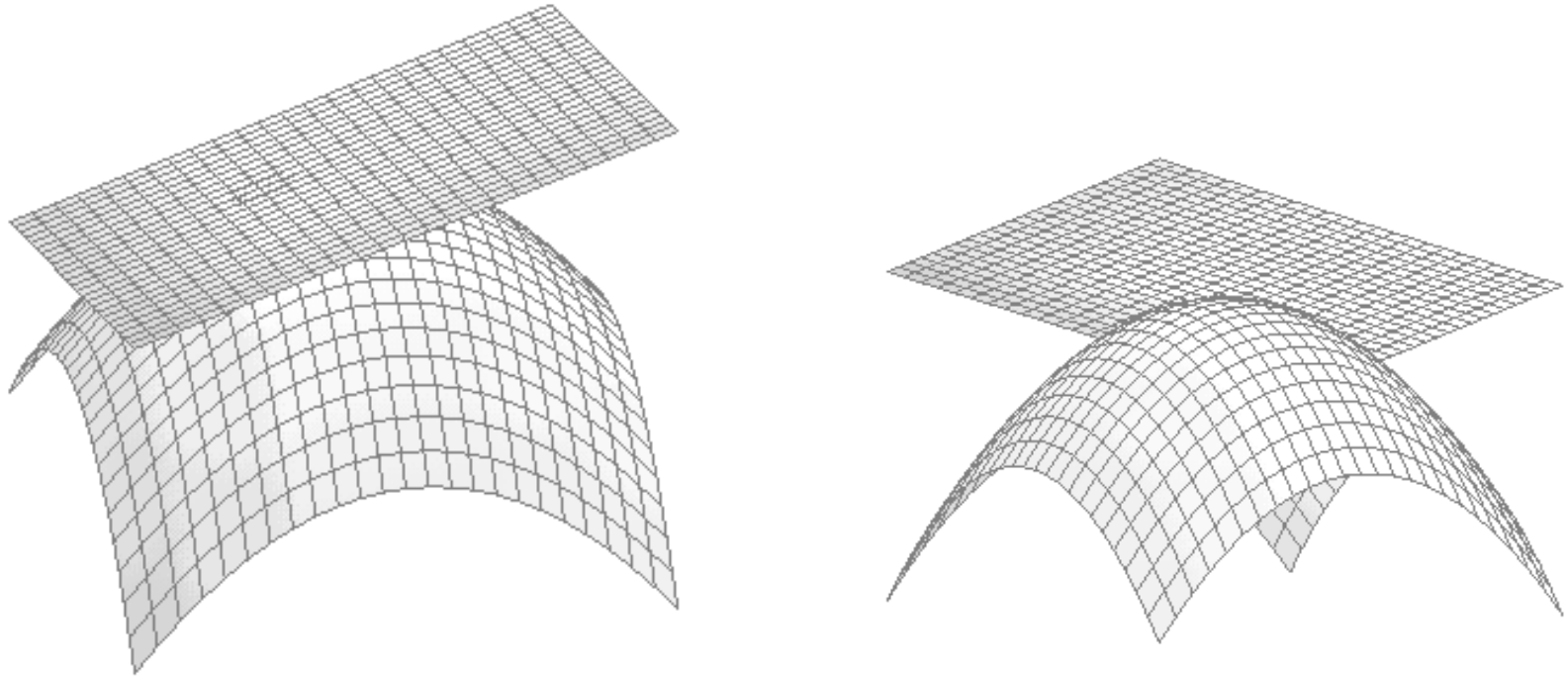
## 10.3 – Le plan tangent

On a vu au chapitre 5 que l'équation de l'unique droite tangente à la courbe  $y = f(x)$  en  $x = a$  est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a), \quad \text{si } f'(a) \text{ existe.}$$

En général, la surface  $z = f(x, y)$  possède une infinité de droite tangente au point  $P(a, b, f(a, b))$ ; toutes ces droites se retrouvent dans un même plan, le **plan tangent** à la surface définie par  $z = f(x, y)$  au point  $P(a, b, f(a, b))$ .

C'est le plan qui repose sur la surface en ne la touchant qu'au **point de tangence**. Si un tel plan existe et que les dérivées partielles sont définies, la surface est **différentiable** ou **dérivable** en  $P(a, b, f(a, b))$ .



Près du point de tangence, la surface ressemble au plan tangent: c'est en partie pourquoi il y a encore des zozos pour croire que la Terre est plate!



Soit  $z = f(x, y)$  une surface dérivable en  $P(a, b, f(a, b))$ . L'équation du plan tangent à la surface au point  $P$  est

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

**Exemples:** déterminer l'équation du plan tangent à la surface  $z = f(x, y)$  au point  $P(a, b, f(a, b))$  dans les cas suivants.

1.  $f(x, y) = -1 + x^2 + y^2$ ,  $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ;

2.  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $P(1, 0, e^{-1})$ ;

3.  $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ ,  $P(2, 1, 1)$ ;

4.  $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P(0, 1, 1)$ .

**Solutions:** on utilise directement la formule.

1. On commence par vérifier que  $P$  se retrouve sur la surface. Puisque  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{2}$ , cela revient à vérifier que  $f(a, b) = -1 + a^2 + b^2 = -\frac{1}{2}$ , ce qui est le cas.

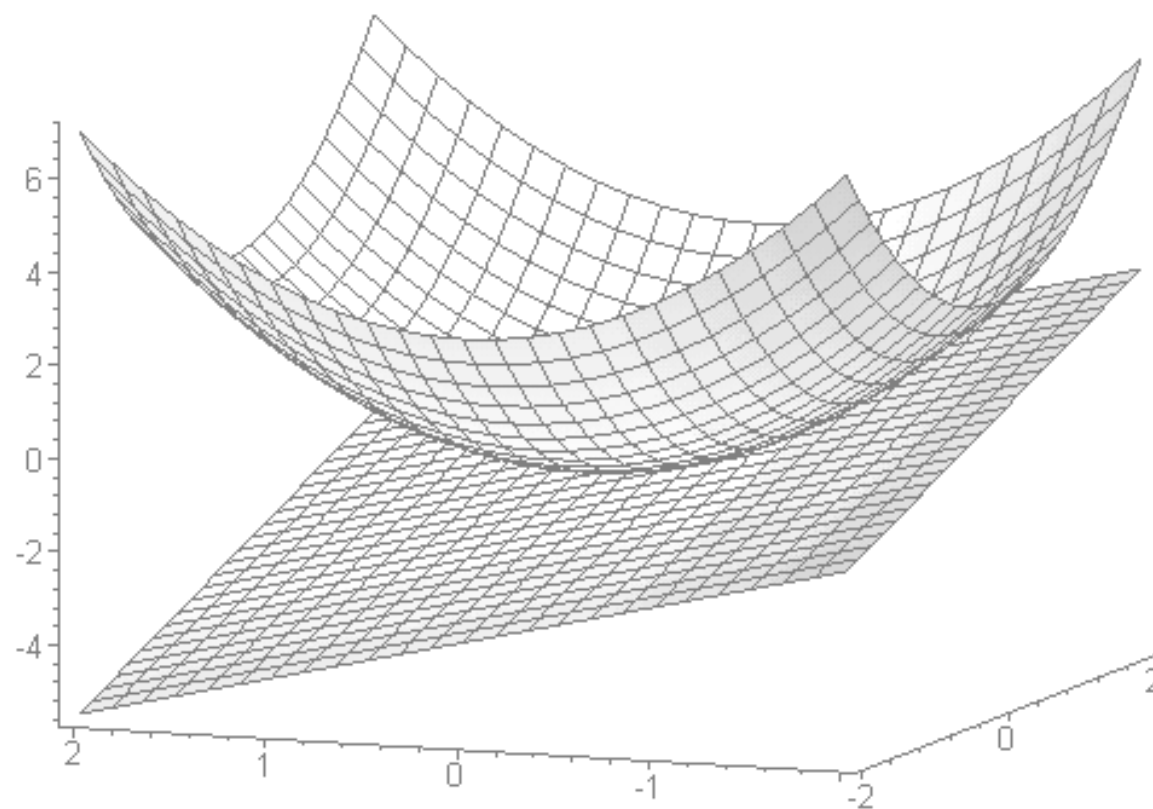
Ensuite, on calcule les dérivées partielles en  $P$ :

$$f_x(x, y) = 0 + 2x + 0 = 2x \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = 0 + 0 + 2y = 2y \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + f_x\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f_y\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1\left(y + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + x - y. \end{aligned}$$



2. On commence par vérifier que  $P$  se retrouve sur la surface. Puisque  $a = 1$  et  $b = 0$ , cela revient à vérifier que  $f(a, b) = e^{-(a^2+b^2)} = e^{-1}$ , ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles en  $P$ :

$$f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(1, 0) = -2(1)e^{-(1^2+0^2)} = -2e^{-1} \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(1, 0) = 0,$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= e^{-1} - 2e^{-1} \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) = e^{-1}(3 - 2x). \end{aligned}$$

3. On commence par vérifier que  $P$  se retrouve sur la surface. Puisque  $a = 2$  et  $b = 1$ , cela revient à vérifier que  $f(a, b) = \sqrt{a - b} = 1$ , ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles en  $P$ :

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x - y}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{x - y}} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(2, 1) = -\frac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = -\frac{1}{2},$$

et l'équation du plan tangent est

$$z = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) = \frac{1}{2}(1 + x - y).$$

4. On commence par vérifier que  $P$  se retrouve sur la surface. Puisque  $a = 0$  et  $b = 1$ , cela revient à vérifier que  $f(a, b) = 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ , ce qui est le cas.

Ensuite, on calcule les dérivées partielles:

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies$$
$$f_x(a, b) = f_x(0, 1) = 0 \quad \text{et} \quad f_y(a, b) = f_y(0, 1) = -1,$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(0, 1) + f_x(0, 1)(x - 0) + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= 1 + 0 \cdot (x - 0) - 1(y - 1) = 2 - y. \end{aligned}$$

## 10.4 – L'optimisation à deux variables

Les **points critiques** de  $f(x, y)$  sont les paires  $(a, b) \in D_f$  telles que

1.  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ , ou
2. au moins une des dérivées partielles  $f_x(a, b)$ ,  $f_y(a, b)$  n'existe pas.

**Exemples:** déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

1.  $f(x, y) = x + y$ ;
2.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ;
3.  $f(x, y) = -e^{-(x^2 + y^2)}$ ;
4.  $f(x, y) = (x - 1)^2 y$ .

## Solutions:

1. Puisque  $f_x(x, y) = 1$  et  $f_y(x, y) = 1$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y)$  n'a pas de point critique.
2. Puisque  $f_x(x, y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$  et  $f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ ,  $f(x, y)$  n'a pas de point critique. **Note:**  $(0, 0) \notin D_f$ ; ce n'est donc pas un point critique.
3. Puisque  $f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$  et  $f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$ ,  $f(x, y)$  n'admet qu'un point critique, en  $(0, 0)$ .
4. Puisque  $f_x(x, y) = 2(x-1)y$  et  $f_y(x, y) = (x-1)^2$ ,  $f(x, y)$  admet des points critiques en  $(1, y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .



Une fonction  $f(x, y)$  est **dérivable d'ordre deux** en  $(x, y) = (a, b)$  si

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

existent lorsque  $(x, y) = (a, b)$ .

**Exemples:** déterminer les dérivées partielles indiquées.

1.  $f_{xy}(3, 1)$ , si  $f(x, y) = (x - 1)^2 y$ ;
2.  $g_{yy}(1, 1)$ , si  $g(x, y) = \frac{x}{y}$ ;
3.  $k_{xy}(x, y)$ , si  $k(x, y) = x \ln(xy)$ ;
4.  $k_{yx}(x, y)$ , si  $k(x, y) = x \ln(xy)$ .

**Solutions:** on utilise les résultats des exemples en pp. 22-25.

1. Puisque  $f_x(x, y) = 2(x - 1)y$ , alors  $f_{xy}(x, y) = 2(x - 1)$  et

$$f_{xy}(3, 1) = 2(3 - 1) = 4.$$

2. Puisque  $g_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ , alors  $g_{yy}(x, y) = \frac{2x}{y^3}$  et  $g_{yy}(1, 1) = \frac{2(1)}{1^3} = 2$ .

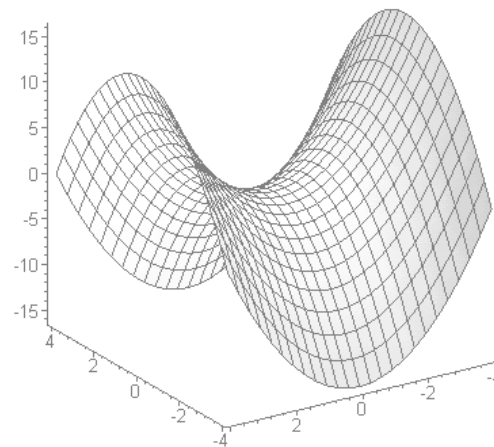
3. Puisque  $k_x(x, y) = 1 + \ln(xy)$ , alors

$$k_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) + 0 = \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (xy) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}.$$

4. Puisque  $k_y(x, y) = \frac{x}{y}$ , alors  $k_{yx}(x, y) = \frac{1}{y}$ .

**⚠ Dans ce qui précède, on voit que  $k_{xy} = k_{yx}$ . Les dérivées mixtes ne sont pas toujours égales, mais elles le sont pour plusieurs fonctions. Dans cette section, on suppose que c'est le cas.**

Soit  $(a, b)$  un point critique de  $f$ . Si  $f(x, y)$  n'atteint pas un maximum ou un minimum relatif en  $(a, b)$ , le point critique  $(a, b)$  est un **point de selle** de  $f(x, y)$ ; c'est l'analogue multi-dimensionnel du point d'inflexion.



Dans certains cas, le **théorème de la dérivée seconde** nous permet d'identifier si une fonction admet un minimum relatif, un maximum relatif, ou encore un point de selle en ses points critiques.

**Théorème:** soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable d'ordre 2 et  $(a, b)$  un de ses points critiques. Supposons que

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 \neq 0$$

- Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(a, b) > 0$ , alors  $f$  atteint un min. relatif au point  $(a, b)$ .
- Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(a, b) < 0$ , alors  $f$  atteint un max. relatif au point  $(a, b)$ .
- Si  $D < 0$ , alors  $(a, b)$  est un point de selle de  $f$ .

**Exemples:** classifier les points critiques des fonctions suivantes.

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1;$

2.  $g(x, y) = x^2 - y^2;$

3.  $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)};$

4.  $k(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

**Solutions:** on utilise le théorème de la dérivée seconde et divers résultats obtenus lors des exemples de ce chapitre.

1. Le point  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $f(x, y)$ . Puisque

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad f_{xy}(x, y) = 0,$$

alors  $D = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$ ; comme  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ ,  $f(x, y)$  atteint un minimum relatif à  $(0, 0)$ .

2. Le point  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $g(x, y)$ . Puisque

$$g_{xx}(x, y) = 2, \quad g_{yy}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad g_{xy}(x, y) = 0,$$

alors  $D = g_{xx}(0, 0)g_{yy}(0, 0) - (g_{xy}(0, 0))^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$ ; ainsi  $(0, 0)$  est un point de selle de  $g(x, y)$ .

3. Le point  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $h(x, y)$ .

Puisque  $h_{xy}(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$ ,

$$h_{xx}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 - 1) \quad \text{et} \quad h_{yy}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2 - 1),$$

alors

$$D = h_{xx}(0, 0)h_{yy}(0, 0) - (h_{xy}(0, 0))^2 = (2e^0(2(0) - 1))^2 - 0^2 = 4 > 0;$$

comme  $h_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ ,  $h(x, y)$  atteint un maximum relatif à  $(0, 0)$ .

4. Le théorème de la dérivée seconde ne peut être utilisé dans ce cas puisque les dérivées partielles de  $k(x, y)$  ne sont pas définies au point critique  $(0, 0)$  (c'est un maximum absolu, soit dit en passant).

Il existe également un résultat nous permettant d'identifier les valeurs extrêmes d'une fonction sur une région (compacte); c'est la généralisation de la marche à suivre du chapitre 6.

**Théorème:** soient  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et  $A$  une région bornée du plan s'exprimant à l'aide d'inégalités de type  $\leq$ . Alors, les valeurs extrêmes de  $f$  sont atteintes soit en un point critique  $(x_*, y_*) \in A$ , soit sur la frontière  $\partial A$ .

On optimise donc  $f$  en trouvant tous les points critiques dans  $A$ , en évaluant  $f$  en ces points, et en évaluant  $f$  sur la frontière.



**Exemple (reprise):** la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y \leq 3,$$

où  $x$  et  $y$  représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

**Exemple (reprise):** la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y \leq 3,$$

où  $x$  et  $y$  représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mensuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

**Solution:** on cherche à maximiser  $f(x, y)$ , lorsque  $0 \leq x, y \leq 3$ . Les dérivées partielles de  $f$  sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 16y - 4x^3, & f_y(x, y) &= 16x - 4y^3, \\ f_{xx}(x, y) &= -12x^2, & f_{yy}(x, y) &= -12y^2, & f_{xy}(x, y) &= 16. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont définies pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Les points critiques de  $f$  satisfont donc à  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ , c'est-à-dire à

$$16y - 4x^3 = 0 \quad \text{et} \quad 16x - 4y^3 = 0.$$

Soit  $(x, y)$  un tel point. Alors  $16x - 4y^3 = 0$ , d'où  $x = \frac{1}{4}y^3$ . Puisque les deux équations doivent être satisfaites simultanément, on obtient

$$16y - 4x^3 = 16y - 4\left(\frac{1}{4}y^3\right)^3 = 16y - \frac{1}{16}y^9 = \frac{1}{16}y(256 - y^8) = 0.$$

Ainsi,  $y = 0$  ou  $y^8 - 256 = 0$ . Mais

$$y^8 - 256 = (y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)(y^4 + 16),$$

d'où  $y = 0, \pm 2$ . Puisque  $y$  doit être non-négatif, on rejette  $y = -2$ .

Lorsque  $y = 2$ ,  $x = \frac{1}{4}2^3 = 2$ ; lorsque  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{4}0^3 = 0$ . Les seuls points critiques d'intérêt se retrouvent donc en  $(x, y) = (0, 0)$  et  $(2, 2)$ .

Selon le théorème de la dérivée seconde,

$$D = f_{xx}(2, 2)f_{yy}(2, 2) - (f_{xy}(2, 2))^2 = (-12(2)^2)^2 - 16^2 = 2048 > 0$$

et  $f_{xx}(2, 2) = -12(2)^2 - 48 < 0$ , d'où  $f(x, y)$  admet un maximum relatif à  $(2, 2)$ ; on a aussi  $D(0, 0) = 0 \cdot 0 - 16^2 < 0$ , d'où  $(0, 0)$  est un point de selle.

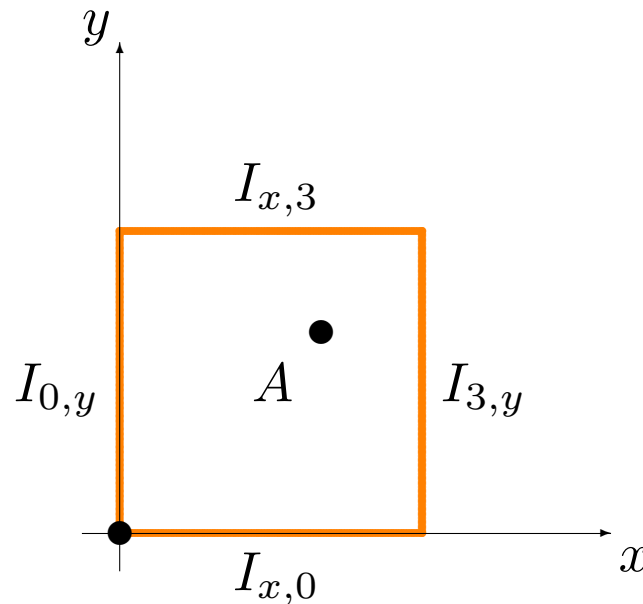
**⚠ Si la fonction n'avait qu'un point critique en  $(2, 2)$ , on pourrait directement conclure que *Cie. Inc.* maximise ses profits si elle vend 2000 gugusses et 2000 gogosses par mois.**

**⚠ Mais il y a plus d'un point critique: on doit alors aussi vérifier ce que si passe sur la frontière du domaine.**

Puisque  $A = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 3\}$ , la frontière  $\partial A$  consiste en 4 segments

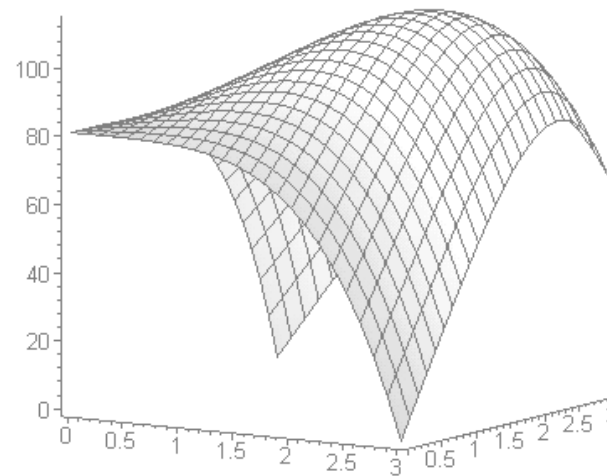
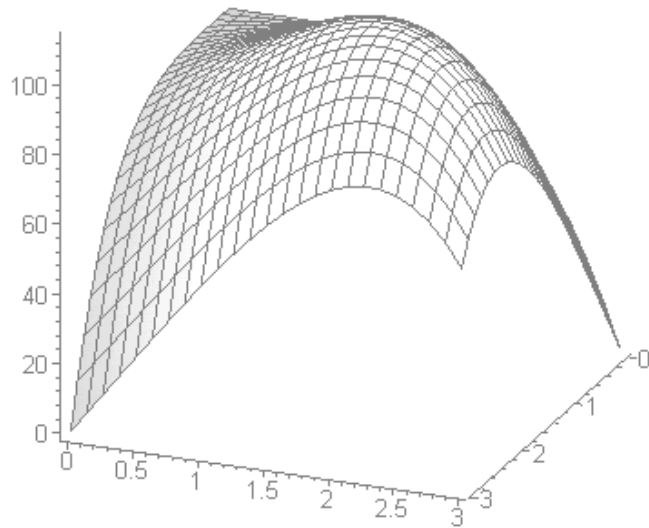
$$I_{x,0} = \{(x, 0); 0 \leq x \leq 3\}, I_{x,3} = \{(x, 3); 0 \leq x \leq 3\},$$

$$I_{0,y} = \{(0, y); 0 \leq y \leq 3\}, I_{3,y} = \{(3, y); 0 \leq y \leq 3\}.$$



- En  $(x, y) = (2, 2)$ ,  $f$  prend la valeur  $81 + 16(2)(2) - 2^4 - 2^4 = 113$ , en  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $f$  prend la valeur  $81 + 16(0)(0) - 0^4 - 0^4 = 81$ ;
- sur  $I_{x,0}$ , la fonction devient  $f(x, 0) = 81 + 16x \cdot (0) - x^4 - 0^4 = 81 - x^4$ , pour  $0 \leq x \leq 3 \implies$  valeur maximale est 81;
- sur  $I_{x,3}$ , la fonction devient  $f(x, 3) = 81 + 16x \cdot (3) - x^4 - 3^4 = 48x - x^4$ , pour  $0 \leq x \leq 3 \implies$  valeur maximale est  $\approx 82.42$  (scénario 6);
- sur  $I_{0,y}$ , la fonction devient  $f(0, y) = 81 + 16y \cdot (0) - 0^4 - y^4 = 81 - y^4$ , pour  $0 \leq y \leq 3 \implies$  valeur maximale est 81;
- sur  $I_{3,y}$ , la fonction devient  $f(3, y) = 81 + 16y \cdot (3) - 3^4 - y^4 = 48y - y^4$ , pour  $0 \leq y \leq 3 \implies$  valeur maximale est  $\approx 82.42$  (scénario 6);.

La valeur maximale globale (113) est obtenue en  $(2, 2)$ .



On a sacrifié plusieurs aspects importants de la théorie et des applications dans cette brève introduction, afin de vous donner un avant-gout du calcul multi-variables; vous aurez la chance d'approfondir vos connaissances dans le cadre d'un cours subséquent.

## Résumé



## Exercices suggérés