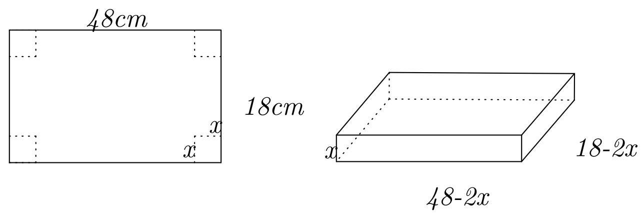
Lecture 1 (Optimisation).

Question 1. *On veut fabriquer une boîte rectangulaire sans couvercle à partir d'une feuille de métal de 18 cm de largeur et 48 cm de longueur, en découpant des carrés à chaque coin de la feuille et en remontant les côtés confère figure ci-dessous.*

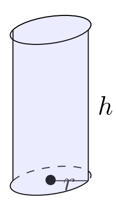


(a) *En observant la figure, donner les dimensions de la boîte en fonction de x : longueur ? largeur ? hauteur ?*

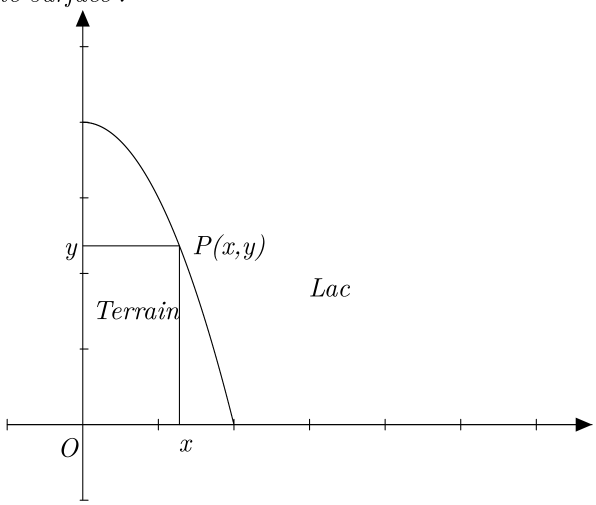
(b) *Exprimer le volume de cette boîte en fonction de x*

(c) *Déterminer les dimensions que doit avoir la boîte pour que son volume soit maximal.*

Question 2. *Quelle doit être la relation entre la hauteur et le rayon d'un cylindre circulaire droit, fermé aux extrémités, et de volume V pour que sa fabrication nécessite le moins de matériaux possible* ?

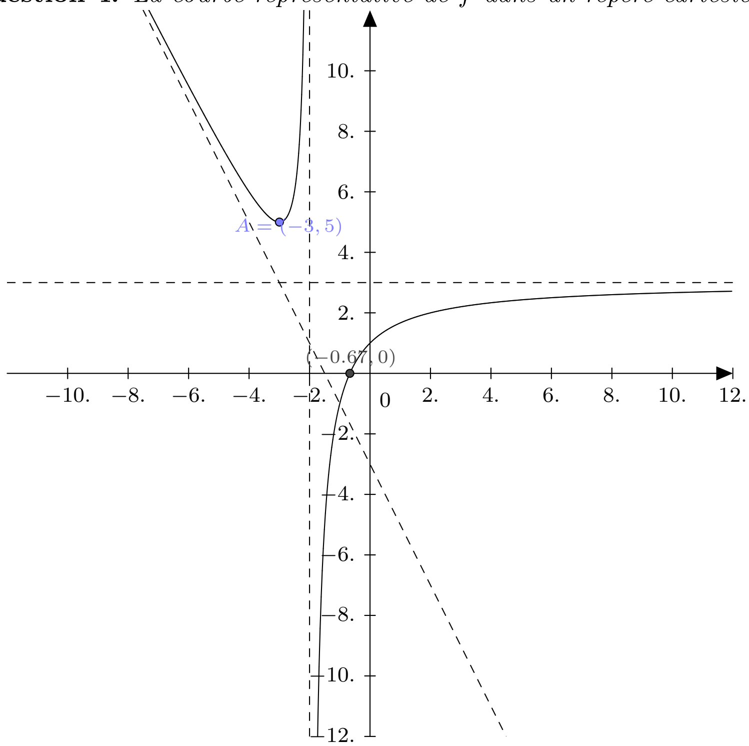


Question 3. *On se propose de maximiser l'aire de la surface d'un terrain rectangulaire délimité par les deux axes de coordonnées, et le bord d'un lac décrit par la parabole $f(x) = -2x^2 + 24$. On note par x et par y les dimensions (en kilomètres) du terrain, comme le montre le schéma ci-dessous. Quelles sont les dimensions qui maximisent la surface de ce terrain ? Quelle est l'aire maximale de cette surface ?*



Lecture 2 (Lecture Graphique)**.**

Question 4. *La courbe représentative de f dans un repère cartésien est la suivante*



Par lecture graphique

(a) *Déterminer le domaine de f*

(b) *Déterminer les solutions des équations et inéquations*

$a)\, f(x) = 0$ $\quad b) f(x) = 5$ $\quad c) f(x) < 0$

(c) *Évaluer :* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$;

(d) *Déterminer le(s) nombre(s) critique(s) de f*

(e) *Donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x*

(f) *Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de f*

(g) *Donner le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x*

(h) *Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas de f*

(i) *Construire le tableau de variation de f relatif à f' et à f''*

Lecture 3 (Taux de variation liés - Elasticité).

Question 5. *Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement x et $(x+2)$, où x est en centimètres et telle que l'aire A du rectangle, en fonction du temps, est donnée par $A(t) = e^{0.06t}$, où t est en seconde.*

a) Déterminer le taux de variation du côté x par rapport au temps.

b) Évaluer $\dfrac{dx}{dt}$ lorsque i) $x = 10cm$; ii) $t = 90s$

Question 6. *La fonction demande pour un produit est donnée par*

$$p = 400(x + 9000)^{-0.05} - 230.$$

Calculez l'élasticité de la demande pour ce produit lorsque la demande est de 20 000 unités. Est-ce que la demande est élastique ou inélastique ?

Lecture 4 (Primitive).

Question 7. *Trouver la fonction $y = f(x)$ telle que $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - x$ et $f(2) = 3$*

Question 8. *Soit $f(x)$ une fonction telle que pour tout x la pente de la droite tangente au point $(x, f(x))$ est donnée par l'expression $\dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$*

a) Trouver $f(x)$ si le graphique de $f(x)$ passe par le point $(1, 0)$

b) Trouver $f(x)$ si l'équation de la droite tangente au graphique de $f(x)$ en $x = -1$ est $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$

Question 9. *Calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x-1}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x$ telle que $F(1) = 0$.*