Université d'Ottawa - Département de Mathématiques et Statistiques

MAT 1700A - Méthodes Mathématiques 1 - Final

Vendredi 11 décembre 2020, 09h30 AM -12h15 PM.

Enseignant : FILS GEASINO FOTSO

Barème : devant chaque question (pour un total de 50 points).

I–Questions à choix multiples

1. (2 points) Soit la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5(n-1)}$, alors la série vaut

A) $\dfrac{e^5}{e^5-1}$ **C)** diverge **B)** $\dfrac{e^5}{e^{-5}-1}$

B) $\dfrac{e^{-5}}{e^5-1}$ **D)** $\dfrac{1}{1-e^5}$ **D)** $\dfrac{1}{e^5-1}$

---

2. (2 points) Soit la fonction $f(x) = 1 - e^x$, laquelle des affirmations suivantes est vraie (il n'y a que une vraie)

A) $f^{-1}(0) = 0$ **C)** $f^{-1}(1) = 0$ **E)** $f^{-1}(1) = 1 - e$

B) $f^{-1}(0)$ n'est pas définie **D)** $f^{-1}(1) = \ln(2)$ **F)** $f^{-1}(2) = 1 - \ln 2$

---

3. (2 points) Le tableau suivant présente quelques valeurs des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et leur dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1
$g(x)$	3	4	1	2
$f'(x)$	2	1	3	4
$g'(x)$	1	2	4	3

Soit $h(x) = (f \circ g)(x)$. Alors, $h'(1) =?$

A) $h'(1) = 3$ **C)** $h'(1) = 16$ **E)** $h'(1) = 8$

B) $h'(1) = 9$ **D)** $h'(1) = 4$ **F)** $h'(1) = 12$

---

4. (2 points) Soit F la primitive de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ telle que $F(1) = \ln 2$. Alors $F(2) =$?

A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\ln 2$

C) $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

D) 1

E) $\ln 2 + \dfrac{1}{2}$

F) 0

5. (2 points) La fonction $y = y(x)$ est définie implicitement par l'équation

$$2xy^2 - y^3 - x^3 - 1 = 0.$$

Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de y au point $(2, 3)$.

A) $y = -x + 5$

B) $y = x + 1$

C) $y = -2x + 7$

D) $y = 3x - 3$

E) $y = 2x - 1$

F) $y = 2x + 1$

6. (2 points) Limite un côté, $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{|x-1|} =$

A) $-(1+a)$

B) $1 + a$

C) $1 - a$

D) $a - 1$

E) a

F) La limite n'existe pas.

7. (2 points) On suppose que $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{5} f(x)\,dx = 6$ et $\displaystyle\int_{e}^{5} f(x)\,dx = 2$. Alors $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \left(2f(x) - \frac{3}{x}\right) dx =$

A) 2

B) 4

C) 6

D) -2

E) -4

F) -6

8. (2 points) La demande pour un certain produit est donnée par $D(p) = 216 - p^2$. Quelle est l'élasticité de la demande quand $p = 9$? Est-ce que cette demande est élastique, inélastique ou unitaire ?

A) $|\eta| = \dfrac{6}{5}$, élastique

B) $|\eta| = \dfrac{5}{6}$, inélastique

C) $|\eta| = \dfrac{5}{6}$, élastique

D) $|\eta| = \dfrac{6}{5}$, inélastique

E) $|\eta| = 1$, élasticité unitaire

F) $|\eta| = \dfrac{2}{5}$, élastique

9. (2 points) On suppose que la demande et l'offre pour un produit sont données par

$$p = D(q) = \frac{1}{q+1} \quad \text{et} \quad p = S(q) = \frac{q}{2},$$

où p est le prix et q la quantité à vendre au prix p. Alors le surplus du consommateur est

A) $\ln 2$ **C)** 2 **E)** $1 + \ln 2$

B) $\ln 2 + \frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **F)** $\ln 2 - \frac{1}{2}$

10. (2 points) Supposons qu'un flux de paiement continu avec une fonction de densité constante de 1000\$ par an soit effectué pendant 25 ans et que le taux d'inflation annuel soit de 2%. Laquelle des valeurs suivantes est plus proche de la valeur actuelle de ce paiement ?

A) \$19781 **C)** \$21742 **E)** \$20381

B) \$19673 **D)** \$21640 **F)** \$22307

11. (2 points) Une personne dépose 1000\$ sur un compte bancaire avec des intérêts composés continuellement. Après trois ans, le solde est de 1200\$. Alors le taux d'intérêt annuel est $r = ?$

A) $\frac{\ln 3}{\ln 1.2}$ **C)** $\frac{3}{\ln 1.2}$ **E)** $\frac{\ln 1.2}{3}$

B) $\frac{\ln 1.2}{\ln 3}$ **D)** $\frac{\ln 3}{1.2}$ **F)** $\frac{\ln 1.2}{\ln 3}$

12. (2 points) Considérons $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 36x^2$ pour $x \in [-4, 1]$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ? (il y a qu'une)

A) f atteint son max absolu à $x = -2$ et son min absolu à $x = 1$

B) f atteint son max absolu à $x = -4$ et son min absolu à $x = -3$

C) f atteint son max absolu à $x = -4$ et son min absolu à $x = 0$

D) f atteint son max absolu à $x = -3$ et son min absolu à $x = 1$

E) f atteint son max absolu à $x = 1$ et son min absolu à $x = -3$

F) f atteint son max absolu à $x = -3$ et son min absolu à $x = 0$

II–Questions à réponses longues

13. La Compagnie Etihad Watch a déterminé que la fonction demande pour une nouvelle montre est donnée par

$$d(q) = 170000\sqrt{20-q}$$

où q est la demande et $p(q)$ est la fonction demande qui donne le prix par unité d'une montre, en dollars, quand la demande est q.

 (a) (3 points) Déterminer $\eta(15)$ et indiquer si le fabricant doit augmenter ou réduire le prix afin d'augmenter son revenu.

 (b) (2 points) Déterminez la quantité de la montre qui maximise le revenu.

14. Soit f une fonction continue et définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. La première et deuxième dérivée de $f(x)$ sont

$$f'(x) = \frac{2(x^3+1)}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2(x^3-2)}{x^3}$$

Aussi, nous connaissons que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$$

 (a) (2 points) Trouver les intervalles où $f(x)$ est croissante, et les intervalles où $f(x)$ est décroissante.

 (b) (1 point) Trouver le(s) valeur(s) de x où $f(x)$ est un maximum relatif, et le(s) valeur(s) de x où $f(x)$ est un minimum relatif.

 (c) (2 points) Trouver le(s) intervalle(s) de x où $f(x)$ est concave vers le haut, et le(s) intervalle(s) de x où $f(x)$ est concave vers le bas.

 (d) (1 point) Trouver tous les points d'inflexion s'il y en a.

 (e) (2 points) Esquisser le graphique $f(x)$. Marquer tous les maximas/minimas relatifs, point(s) d'inflexion, asymptotes, s'il y en a.

15. Un manager de la société de microprocesseurs White Box a déterminé que la fonction de coût marginal pour un certain type de puce informatique de véhicule fabriquée dans l'installation donnée par

$$C'(x) = 6x\sqrt{x^2+11}$$

où x représente le nombre de puces informatiques du véhicule produites chaque heure et $C'(x)$ représente le coût marginal. Le gérant sait qu'il en coûte 1932$ pour fabriquer cinq puces.

 (a) (3 points) Déterminer la fonction coût.

 (b) (1 point) Déterminer les coûts fixes.

16. (a) (2 points) Évaluez $\int_1^e x^3 \ln(x)\,dx$

(b) (2 points) Évaluer $\int \frac{1}{(3x-2)^{3/2}}\,dx$

17. La Companie chinois Wok produit deux types de woks chaque jour. Le profit de la vente est donné par

$$P(x,y) = -0.3y^3 - 0.2x^2 + 6xy - 2, \qquad \text{(des centaines de dollars).}$$

où x est le nombre de taille normale et y est le nombre de taille géante.

(a) (4 points) Combien de woks de taille normale et combien de woks géants devraient être vendus chaque jour pour maximiser les profits ?

(b) (1 point) Quel est le profit maximal ?