

MAT 1700

Méthodes mathématiques I

Chapitre 1

Les séries

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2021

Le calcul dans la joie (Boily et Hart)

Aperçu

Scénario – Placements et intérêt (p.2)

1.1 – Les séries (p.6)

- Formules (p.8)

1.2 – Les séries géométriques (p.10)

- Les séries infinies (p.17)

1.3 – Les séries de paiements (p.25)

- Les séries de dépôts (p.31)

Résumé (p.35)

Exercices suggérés (p.36)

Scénario – Placements et intérêt

Exemple: un montant de 50\$ est déposé dans un compte en banque à chaque début de mois durant deux ans. Le taux d'intérêt annuel est de 6%, composé mensuellement. Quel est le solde du compte après 25 dépôts mensuels?

Comment s'y prend-on pour résoudre des problèmes de ce genre?

Scénario – Placements et intérêt

Exemple: un montant de 50\$ est déposé dans un compte en banque à chaque début de mois durant deux ans. Le taux d'intérêt annuel est de 6%, composé mensuellement. Quel est le solde du compte après 25 dépôts mensuels?

Comment s'y prend-on pour résoudre des problèmes de ce genre?

Solution: le taux d'intérêt est un taux annuel; l'intérêt mensuel est

$$\frac{0.06}{12} = 0.005 = 0.5\%.$$

En général, le solde au début du mois (juste après le dépôt mensuel) est

$$\begin{aligned}\text{solde au début du mois} &= \text{solde à la fin du mois précédent} + \text{dépôt mensuel} \\ &= (\text{solde au début du mois précédent} + \text{intérêt mensuel}) \\ &\quad + \text{dépôt mensuel}.\end{aligned}$$

Si S_n dénote le solde au début du n -ième mois ($n \geq 2$), on a alors

$$\begin{aligned}S_n &= S_{n-1} + 0.005S_{n-1} + 50 \\ &= 1.005S_{n-1} + 50.\end{aligned}$$

Le solde S_n dépend du solde S_{n-1} , qui dépend lui-même du solde S_{n-2} , et ainsi de suite \Rightarrow c'est une **relation de récurrence**.

Ceci ne nous donne toujours pas S_n directement: il faut remonter la pente.

Le solde S_1 est le dépôt initial (50). Les soldes S_2 , S_3 , S_4 , et S_n sont

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{solde au début du premier mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_1 + 0.005S_1 + 50 \\ &= 1.005S_1 + 50 \\ &= (1.005)50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{solde au début du second mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_2 + 0.005S_2 + 50 \\ &= 1.005S_2 + 50 \\ &= 1.005((1.005)50 + 50) + 50 = (1.005)^2 50 + (1.005)50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \text{solde au début du troisième mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_3 + 0.005S_3 + 50 = 1.005S_3 + 50 \\ &= 1.005 \left((1.005)^2 50 + (1.005) 50 + 50 \right) + 50 \\ &= (1.005)^3 50 + (1.005)^2 50 + (1.005) 50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (1.005)^{n-1} 50 + (1.005)^{n-2} 50 + \cdots + (1.005) 50 + 50 \\ &= 50 \left((1.005)^{n-1} + (1.005)^{n-2} + \cdots + (1.005) + 1 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, le solde après $n = 25$ dépôts est

$$S_{25} = 50 \left((1.005)^{24} + (1.005)^{23} + \cdots + (1.005) + 1 \right) \approx 1327.96\$.$$

 **Lorsque n est élevé, le calcul direct est déconseillé.**

1.1 – Les séries

On se sert des **séries** pour résoudre ce genre de problème.

Le symbole \sum (prononcé “somme”) est utilisé pour simplifier les expressions contenant la somme de plusieurs termes: par exemple

$$\sum_{i=2}^7 a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \quad \text{quelque soient les termes } a_i.$$

Les termes a_i sont additionnés successivement, de a_2 (borne inférieure: $i = 2$) jusqu'à a_7 (borne supérieure: $i = 7$), inclusivement.

Exemples:

$$1. \sum_{i=1}^3 a_i =$$

$$2. \sum_{i=2}^{19} 2i =$$

3. Dans le scénario du début du chapitre, S_{25} peut s'exprimer par:

$$S_{25} = 50 + 50(1.005) + \cdots + 50(1.005)^{24} =$$

Exemples (et solutions):

$$1. \sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$2. \sum_{i=2}^{19} 2i = 2(2) + 2(3) + \cdots + 2(18) + 2(19)$$

3. Dans le scénario du début du chapitre, S_{25} peut s'exprimer par:

$$S_{25} = 50 + 50(1.005) + \cdots + 50(1.005)^{24} = \sum_{i=0}^{24} 50(1.005)^i.$$

Formules

Certaines formules spécifiques peuvent faciliter l'**évaluation** des séries:

$$\sum_{i=1}^k 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ fois}} = k, \quad \sum_{i=1}^k i = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^k i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Les formules suivantes permettent de simplifier les combinaisons de séries:

$$\sum_{i=1}^k na_i = n \sum_{i=1}^k a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k b_i.$$

Exemples:

$$1. \sum_{i=1}^5 3 =$$

$$2. \sum_{i=1}^7 (1 + i) =$$

$$3. \sum_{i=1}^{19} (1 + i)^2 =$$

Exemples (et solutions):

$$1. \sum_{i=1}^5 3 = 3 \sum_{i=1}^5 1 = 3(5) = 15.$$

$$2. \sum_{i=1}^7 (1 + i) = \sum_{i=1}^7 1 + \sum_{i=1}^7 i = 7 + \frac{7(7+1)}{2} = 35.$$

$$\begin{aligned} 3. \sum_{i=1}^{19} (1 + i)^2 &= \sum_{i=1}^{19} (1 + 2i + i^2) = \sum_{i=1}^{19} 1 + 2 \sum_{i=1}^{19} i + \sum_{i=1}^{19} i^2 \\ &= 19 + 2 \cdot \frac{19(19+1)}{2} + \frac{19(19+1)(2(19)+1)}{6} = 2869. \end{aligned}$$

1.2 – Les séries géométriques

Si a et r sont des constantes, une série de la forme

$$\sum_{i=0}^k ar^i = a + ar + \cdots + ar^k$$

est dite **géométrique**. La série du début du chapitre est une série géométrique (avec $a = 50, r = 1.005$).

On calcule la valeur d'une série géométrique de la manière suivante: soit

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^k ar^i = a + ar + \cdots + ar^k.$$

Alors

$$rS_{k+1} = r(a + ar + \cdots + ar^k) = ar + ar^2 + \cdots + ar^{k+1}$$

et

$$\begin{aligned}(1 - r)S_{k+1} &= S_{k+1} - rS_{k+1} \\ &= a + ar + \cdots + ar^k - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{k+1}) \\ &= a - ar^{k+1},\end{aligned}$$

d'où

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^k ar^i = \frac{a(1 - r^{k+1})}{1 - r}, \quad r \neq 1.$$

Si $r = 1$, la série géométrique est en fait une série de la forme

$$\sum_{i=0}^k ar^i = a \sum_{i=0}^k 1 = a(k + 1).$$

C'est ainsi que nous avons obtenu la valeur de S_{25} au tout début du chapitre: en effet,

$$\begin{aligned} S_{25} &= \sum_{i=0}^{24} 50(1.005)^i \\ &= \frac{50(1 - (1.005)^{25})}{1 - 1.005} \approx 1327.96. \end{aligned}$$

Exemples:

$$1. \sum_{i=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$2. \sum_{i=0}^4 (2)^i =$$

$$3. \sum_{i=0}^{127} 3(-1)^i =$$

Exemples (et solutions):

$$1. \sum_{i=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{511}{256}.$$

$$2. \sum_{i=0}^4 (2)^i = (2)^0 + \cdots + (2)^4 = \frac{1 \left(1 - (2)^5\right)}{1 - 2} = 31.$$

$$3. \sum_{i=0}^{127} 3(-1)^i = 3(-1)^0 + \cdots + 3(-1)^{127} = \frac{3 \left(1 - (-1)^{128}\right)}{1 - (-1)} = 0.$$

4. À chaque heure, une patiente reçoit une dose de 100mg d'un médicament; en une heure, son corps élimine 70% du médicament qui s'y trouvait avant l'administration de la nouvelle dose. Quelle est la quantité de médicament dans son corps immédiatement après la sixième dose?

Solution: soit Q_n la quantité de médicament dans son corps immédiatement après la n -ième dose. Pour $n \geq 2$, on a

$$Q_n = 0.3Q_{n-1} + 100, \quad Q_1 = 100.$$

Q_n dépend de Q_{n-1} , qui dépend de Q_{n-2} , etc.

Pour Q_2 on a:

$$Q_2 = 0.3Q_1 + 100 = (0.3)100 + 100.$$

Pour Q_3 , on a

$$\begin{aligned} Q_3 &= 0.3Q_2 + 100 = 0.3((0.3)100 + 100) + 100 \\ &= (0.3)^2 100 + (0.3)100 + 100. \end{aligned}$$

En général, la quantité Q_n est donnée par

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} 100(0.3)^i.$$

Selon la formule, $Q_6 = \frac{100(1-(0.3)^6)}{1-0.3} \approx 142.7530\text{mg}$.

5. Si la patiente continue de recevoir une nouvelle dose de 100mg à chaque heure, indéfiniment, et si son corps continue d'éliminer 70% du médicament présent dans son corps à chaque heure, que se produit-il?

Solution: après 6 doses, il y a 142.7530mg de médicament dans son corps; après 9 et 11 doses, il y en a respectivement

$$Q_9 = \frac{100(1 - (0.3)^9)}{1 - 0.3} \approx 142.8543; \quad Q_{11} = \frac{100(1 - (0.3)^{11})}{1 - 0.3} \approx 142.8569.$$

En fait, pour toute dose suivant la douzième, les quantités Q_n ont les même quatre premières décimales: par exemple, $Q_{17} = 142.8571\dots$ et $Q_{2283726} = 142.8571\dots$

Les séries infinies

Une **série infinie** est une série pour laquelle il n'y a pas de borne supérieure.

Exemple:

$$1. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} =$$

$$3. \sum_{i=1}^{\infty} i =$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} =$$

$$4. \sum_{i=0}^{\infty} 100(0.3)^i =$$

Les séries infinies

Une **série infinie** est une série pour laquelle il n'y a pas de borne supérieure.

Exemple:

$$1. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$3. \sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$4. \sum_{i=0}^{\infty} 100(0.3)^i = 100 + 30 + \dots$$

 **les séries infinies ne prennent pas toutes une valeur.**

Une série sans valeur est **divergente**; autrement, elle est **convergente**.

En général, on détermine la convergence d'une série à l'aide de méthodes sophistiquées (on en reparle au chapitre 9).

Dans le cas des séries **géométriques infinies**, la règle est simple: soit

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

une série géométrique infinie. La série converge si et seulement si $|r| < 1$.

(C'est-à-dire que la série converge si $|r| < 1$, et qu'elle diverge si $|r| \geq 1$.)

Si la série géométrique infinie converge, sa valeur est

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}.$$

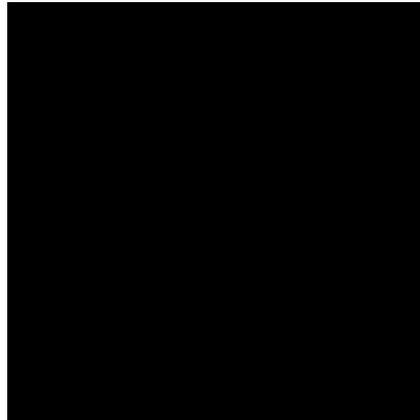
Exemples

1. $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$ est divergente puisque $|r| = |2| \geq 1$.

Si on essaie d'utiliser la formule ci-dessus pour une série divergente, le résultat est souvent absurde: dans ce cas, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1 \quad \triangle!$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



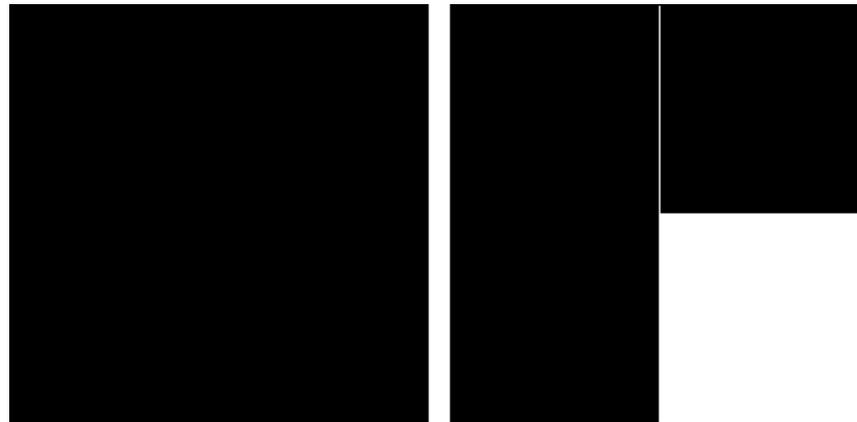
$$S_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_1 = S_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_3 = S_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_4 = S_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_5 = S_4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_6 = S_5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{32} + \frac{1}{64} = \frac{127}{64}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S_7 = S_6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{64} + \frac{1}{128} = \frac{255}{128}$$

$$2. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \text{ puisque } |r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } a = 1.$$



$$S = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

3.
$$\sum_{i=0}^{\infty} 2 \left(\frac{-3}{4} \right)^i = 2 + 2 \left(\frac{-3}{4} \right) + 2 \left(\frac{-3}{4} \right)^2 + \dots = \frac{2}{1 + 3/4} = \frac{8}{7},$$
 puisque
 $|r| = \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} < 1$ et $a = 1$.

4. Quand la borne inférieure n'est pas $i = 0$, on doit commencer par ré-arranger les termes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^i &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2} \right)^i = \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. Le nombre rationnel

0.18181818181818181818181818...

peut s'exprimer à l'aide de la série géométrique

$$0.18 + 0.0018 + 0.000018 + 0.00000018 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 0.18 \left(\frac{1}{100}\right)^i.$$

Selon la règle de convergence, cette série converge puisque $|r| = \frac{1}{100} < 1$; elle prend donc la valeur

$$\frac{0.18}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0.18}{\frac{99}{100}} = \frac{100(0.18)}{99} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

6. À la longue, la patiente se retrouve avec un quantité

$$Q_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} 100(0.3)^i = \frac{100}{1-0.3} = \frac{100}{0.7} \approx 142.8571421857141 \dots$$

7. $\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + \dots$ n'est pas une série géométrique.

La règle de convergence ne s'applique pas; évidemment, la série diverge.

8. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ n'est pas une série géométrique.

La règle de convergence ne s'applique pas; est-il évident qu'elle diverge?

k	Somme partielle S_k	k	Somme partielle S_k	k	Somme partielle S_k
1	1.00	11	3.02	51	4.52
2	1.50	12	3.10	52	4.54
3	1.83	13	3.18	53	4.56
4	2.08	14	3.25	54	4.58
5	2.28	15	3.32	55	4.59
6	2.45	16	3.38	56	4.61
7	2.59	17	3.44	57	4.63
8	2.72	18	3.50	58	4.65
9	2.83	19	3.55	59	4.66
10	2.93	20	3.60	60	4.68

$$S = ???$$

1.3 – Les séries de paiements

L'**intérêt** est une somme monétaire qu'une banque offre à un client en rémunération de l'usage qu'elle fait de l'argent qu'il dépose chez elle.

Une somme A est placée à un taux d'intérêt de $i\%$. Supposons que l'intérêt reçu est automatiquement re-déposé dans le compte.

Si l'intérêt est **composé annuellement**, la banque redonne $i\% \cdot A$ en intérêt au client après 12 mois. Le solde à la fin de l'année est

$$\underbrace{A}_{\text{solde initial}} + \underbrace{i\%A}_{\text{intérêt après 1 an}} = A(1 + i\%).$$

Si l'intérêt est **composé deux fois par année**, la banque redonne $\frac{i\%}{2} \cdot A$ au client après la première tranche de 6 mois; le solde à cet instant est

$$\underbrace{A}_{\text{solde initial}} + \underbrace{\frac{i\%}{2}A}_{\text{intérêt après 6 mois}} = A \left(1 + \frac{i\%}{2} \right).$$

La banque redonne ensuite $\frac{i\%}{2} \cdot A \left(1 + \frac{i\%}{2} \right)$ au client après la seconde tranche de 6 mois; à la fin de l'année le solde est

$$\begin{aligned} \underbrace{A \left(1 + \frac{i\%}{2} \right)}_{\text{solde après 6 mois}} + \underbrace{\frac{i\%}{2} \cdot A \left(1 + \frac{i\%}{2} \right)}_{\text{intérêt - 2}^{\text{e}} \text{ tranche de 6 mois}} &= A \left(1 + \frac{i\%}{2} + \frac{i\%}{2} \left(1 + \frac{i\%}{2} \right) \right) \\ &= A \left(1 + i\% + \frac{i\%^2}{4} \right) = A \left(1 + \frac{i\%}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

En général, si l'intérêt est composé n fois par année, la banque redonne de l'intérêt après chaque tranche de $\frac{12}{n}$ mois, et le solde du compte à la fin de l'année est

$$A \left(1 + \frac{i\%}{n} \right)^n.$$

La **valeur capitalisée** C d'un placement A dont l'intérêt est composé n fois par année pendant t années à un taux $i\%$ est donnée par

$$C = A \left(1 + \frac{i\%}{n} \right)^{nt}.$$

Par opposition à C , la valeur A est appelée la **valeur actualisée** (ou valeur présente).

Exemples:

1. Elowyn, Gwynneth, et Llewellyn reçoivent tous 1000\$ en héritage.

- Elowyn place son argent dans un compte où le taux d'intérêt est de 3%, composé 3 fois par année;
- Gwynneth dans un compte où le taux d'intérêt est de 4%, composé annuellement, et
- Llewellyn dans un compte où le taux d'intérêt est de 2%, composé quotidiennement (en supposant qu'une année comporte toujours 365 jours).

Parmis les trois investisseurs, lequel ou laquelle à fait la meilleur affaire?

Solution: selon la formule précédente, la valeur des investissements après 5 ans est

$$E: 1000 \left(1 + \frac{0.03}{3}\right)^{3(5)} = 1000(1 + 0.01)^{15} = 1000(1.01)^{15} \approx 1160.97\$$$

$$G: 1000 \left(1 + \frac{0.04}{1}\right)^{1(5)} = 1000(1 + 0.04)^5 = 1000(1.04)^5 \approx 1216.65\$$$

$$\begin{aligned} LI: 1000 \left(1 + \frac{0.02}{365}\right)^{365(5)} &\approx 1000(1 + 0.0000547945)^{1825} \\ &= 1000(1.0000547945)^{1825} \approx 1105.17\$ \end{aligned}$$

C'est donc Gwynneth qui fait la meilleure affaire.

2. Supposons que la valeur capitalisée C d'un placement A est $C = 3170.60\$$. En sachant que l'intérêt a été composé 4 fois par année à un taux de 8% pendant 3 ans, déterminer la valeur du placement initial A .

Solution: selon la formule,

$$A = \frac{C}{\left(1 + \frac{i\%}{n}\right)^{nt}} = \frac{3170.60}{\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4(3)}} \approx 2500.00\$.$$

Le placement initial A est la valeur actualisée de C ; c'est la somme qu'il faudrait déposer dans un compte avec un taux d'intérêt de 8% , composé 4 fois par année, afin d'obtenir une somme de $3170.60\$$ après 3 ans.

Les séries de dépôts

Supposons qu'une cliente fasse une série de dépôts, tous de valeur P , dans un compte dont l'intérêt est composé n fois par année à un taux de $i\%$.

Si chaque dépôt est effectué **immédiatement après** que l'intérêt soit composé, le solde C après le k -ième dépôt est donné par

$$C = \sum_{j=0}^{k-1} P \left(1 + \frac{i\%}{n}\right)^j = \frac{P \left(1 - \left(1 + \frac{i\%}{n}\right)^k\right)}{1 - \left(1 + \frac{i\%}{n}\right)}$$

(Comparer avec le scénario initial).

Exemple: en 2004, Daniel Alfredsson, joueur vedette des Sénateurs d'Ottawa, a signé un contrat d'une valeur approximative de 5 millions de dollars par année, pour une durée de 5 ans; à la fin du contrat, il avait donc reçu 25 millions de dollars.

On suppose que l'équipe n'entendait payer Alfredsson qu'à la fin de son contrat.

Quelle somme P a-t-elle déposée annuellement dans un compte en banque où le taux d'intérêt est de 7%, composé annuellement, afin de pouvoir se permettre le contrat d'Alfredsson?

(Go Sens!)

Solution: nous utilisons la formule, avec $C = 25$ millions, $i\% = 0.07$, $n = 1$, et $k = 5$. Ainsi,

$$25 = \frac{P \left(1 - \left(1 + \frac{0.07}{1} \right)^5 \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.07}{1} \right)} = \frac{P (1 - (1.07)^5)}{1 - (1.07)},$$

c'est-à-dire

$$P = 25 \frac{-0.07}{1 - (1.07)^5} \approx 4.3473 \text{ millions};$$

les Sénateurs n'auraient ainsi eu besoin que de 4.3473\$ millions par année (ou 21.7363\$ millions en tout) afin de pouvoir se permettre le contrat de 25 millions.

DEPOT	INITIAL	<i>P</i>	INTERET	FINAL
1	0	4.3473	0.3043	4.6516
2	4.6516	4.3473	0.6299	9.6288
3	9.6288	4.3473	0.9783	14.9544
4	14.9544	4.3473	1.3511	20.6527
5	20.6527	4.3473		25

TOTAL 21.7363

Résumé

Exercices suggérés