MAT 1700
Méthodes mathématiques I

Chapitre 2
Les problèmes classiques

P. Boily (uOttawa)

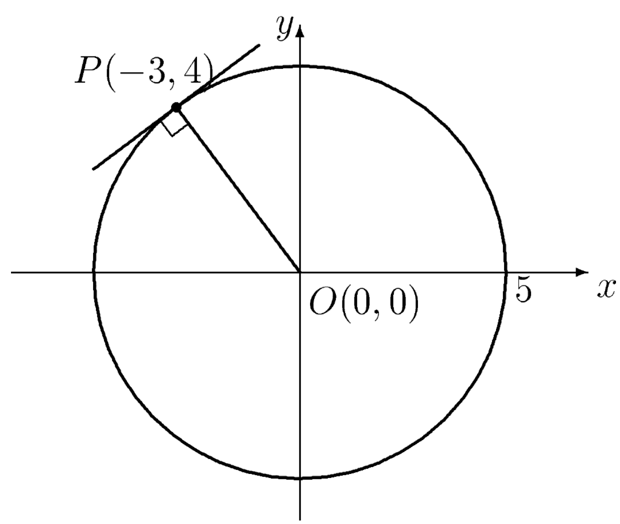
Session d'hiver – 2021

Aperçu

Scénario – La tangente au cercle

Exemple: trouver l'équation de la droite tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ au point $P(-3, 4)$.

Solution: la solution est simple si l'on sait que la droite tangente au cercle en P est perpendiculaire au rayon du cercle passant par P.



La pente du rayon OP est

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{-3-0} = -\frac{4}{3}.$$

Soit m_2 la pente de la droite recherchée, et b_2 son ordonnée à l'origine; l'équation de la droite tangente est donc

$$y = m_2 x + b_2.$$

Puisque $OP \perp$ droite tangente, alors $m_1 m_2 = -1$ (c'est une propriété des droites perpendiculaires), d'où

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-4/3} = \frac{3}{4}.$$

Le point $P(-3, 4)$ se retrouve sur la droite tangente d'où, en substituant les $x = -3$ et $y = 4$ dans l'équation de la droite tangente, on obtient

$$4 = \frac{3}{4}(-3) + b_2 \quad \leftrightsquigarrow \quad b_2 = \frac{25}{4}.$$

L'équation de la droite tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ au point $P(-3, 4)$ est donc

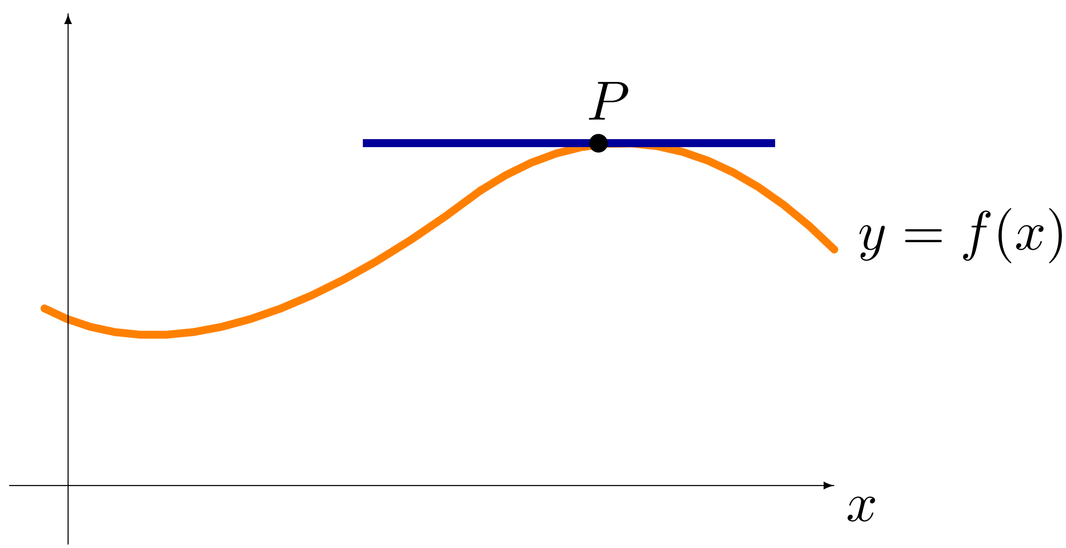
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

⚠ **La relation d'orthogonalité entre la droite tangente et le rayon est propre au cercle. Ce n'est pas un méthode générale.**

2.1 – La pente de la droite tangente

Considérons le graphique d'une fonction f reliant une variable indépendente x à une variable dépendente y, c'est-à-dire $y = f(x)$.

Soit P un point sur le graphe de $y = f(x)$. Quelle est la pente de la **droite tangente** (la droite qui "s'accote") au graphe en P?



C'est une question aux apparences anodines, mais elle est **fondamentale**. On la retrouve, parfois déguisée, dans les domaines suivants:

- physique, math, et statistique;
- science de l'économie;
- génie;
- sciences sociales;
- science des données et apprentissage automatique;
- etc.

Concepts de géométrie planaire analytique

Soit $P(x, y)$ un point du plan:

- la première composante x est l'**abscisse de** P
- la seconde composante y est l'**ordonnée de** P.

Soient $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ deux points arbitraires:

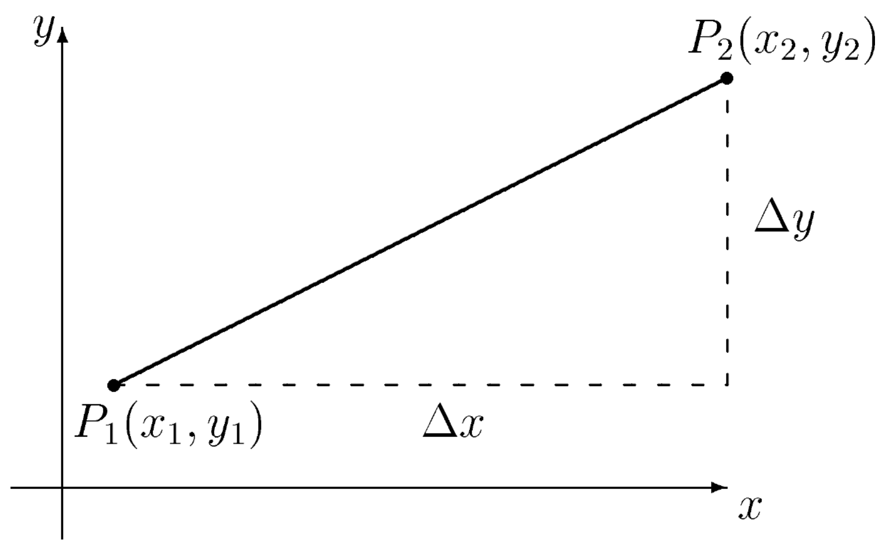
- la **différence** Δx **entre les abscisses de** P_1 **et** P_2, est

$$\Delta x = x_2 - x_1;$$

- la **différence Δy entre les ordonnées de P_1 et P_2** est

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

Si $P_1 \neq P_2$, il n'y a qu'une seule droite passant par les deux points.



Si $P_1 \neq P_2$, la **pente de la droite reliant** P_1 **et** P_2 est

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Dans ce cas, l'équation de la droite reliant P_1 et P_2 est donnée par

$$y = mx + (y_1 - mx_1) \quad \text{ou} \quad y = mx + (y_2 - mx_2),$$

ou $y = mx + (y_0 - mx_0)$ pour n'importe quel point $P_0(x_0, y_0)$ sur la droite.

Une droite est complètement déterminée par deux de ses points (distincts), ou par l'entremise de sa pente et d'un de ses points.

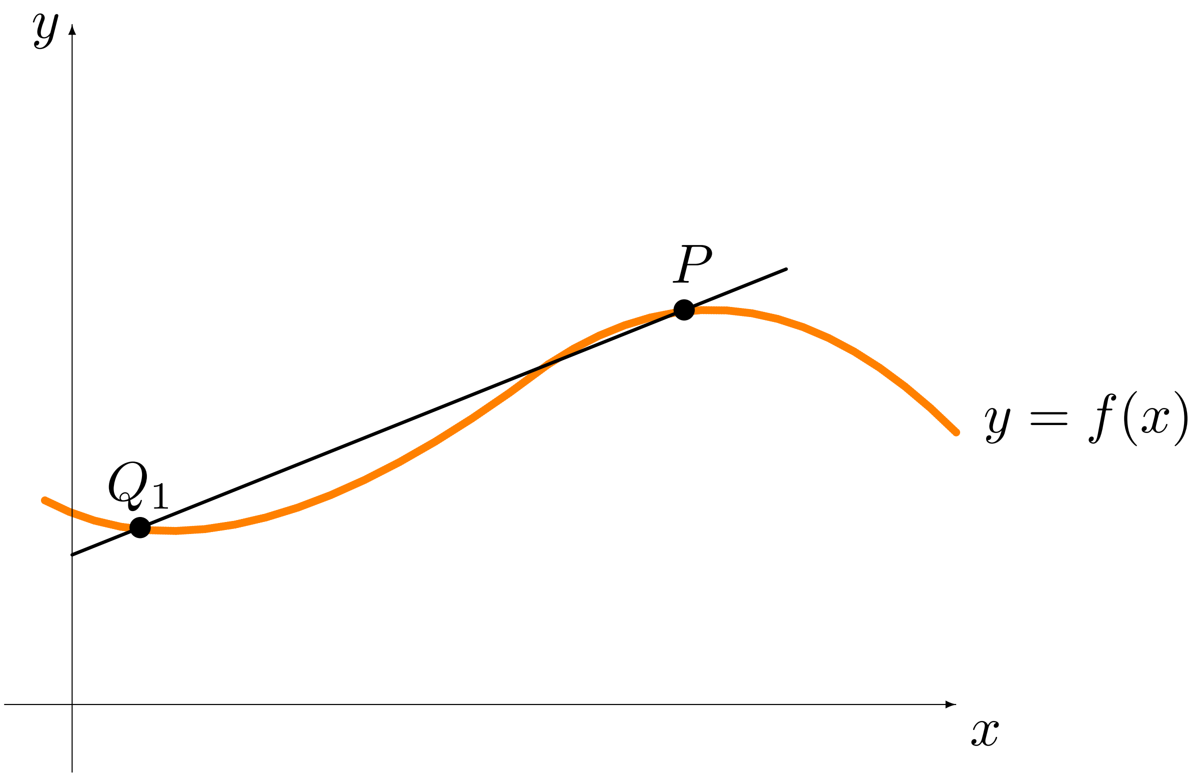
L'approximation par les droites sécantes

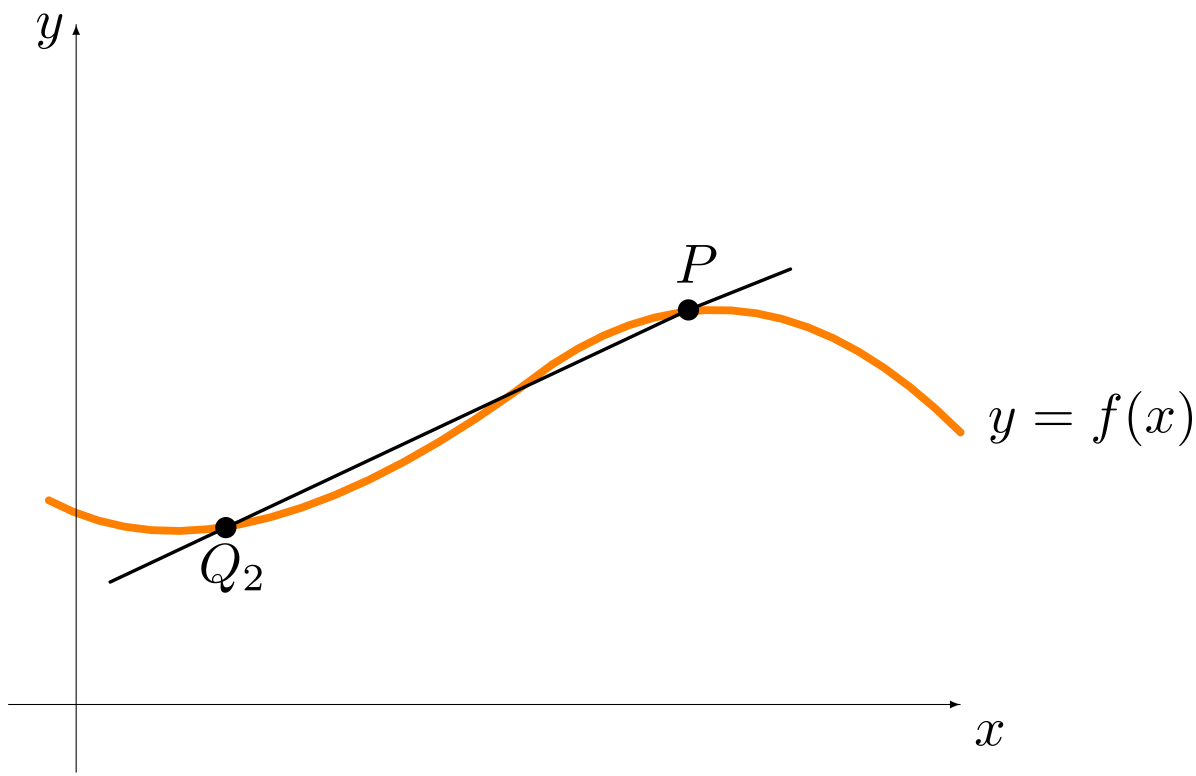
Mais on ne connait que le point $P(a, f(a))$ sur la courbe.

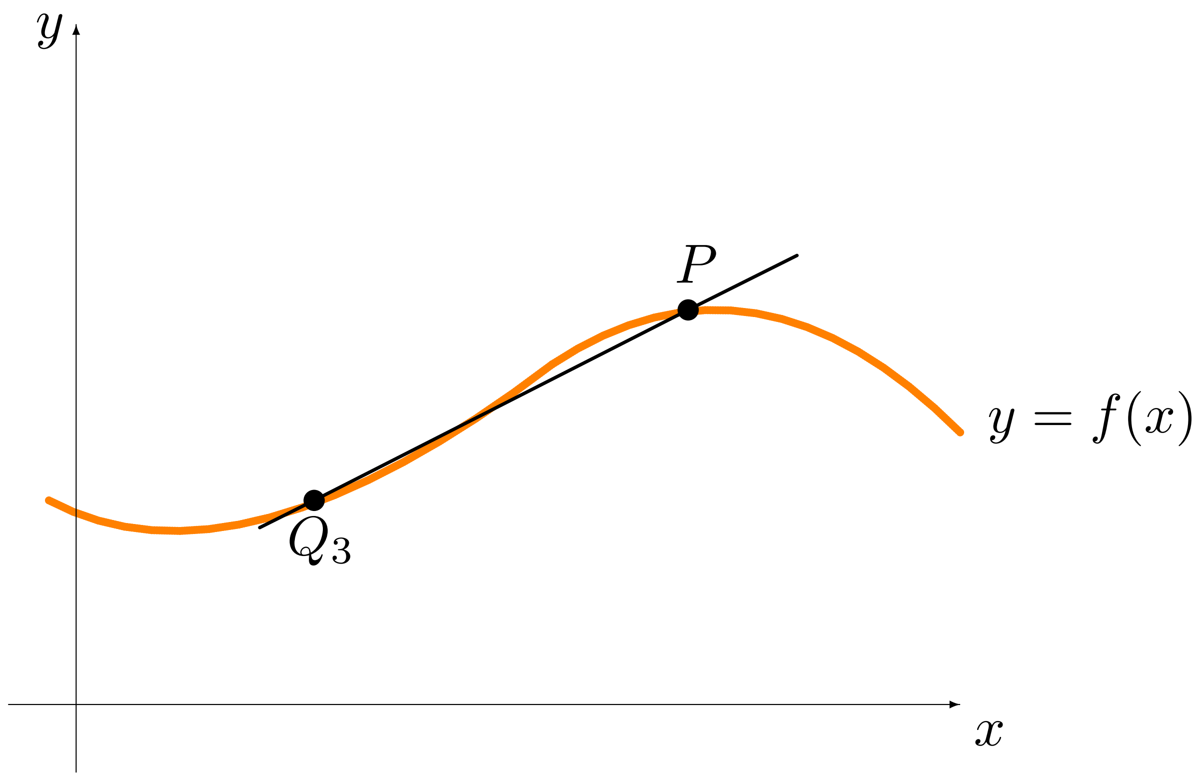
Soit $Q_0 \neq P$ sur le graphe. La droite qui relie les points P et Q_0 est la **droite sécante de P et Q_0**.

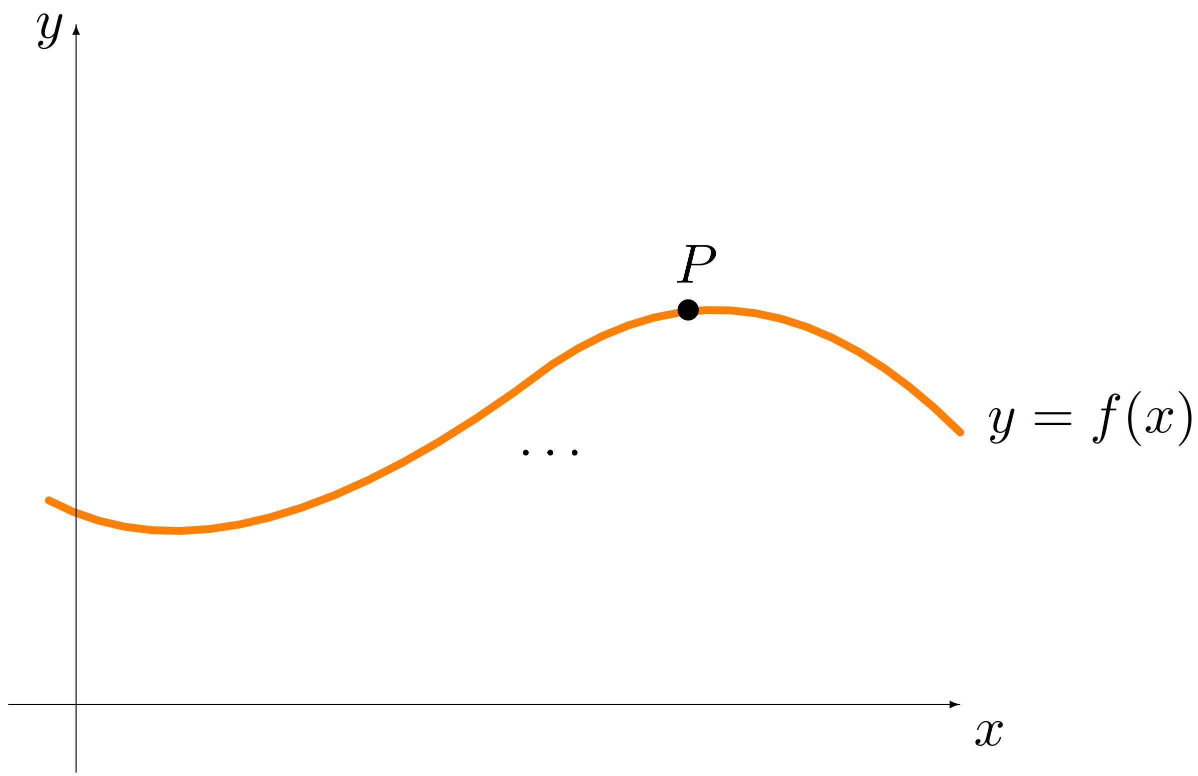
Si $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ sont des points se rapprochant de P sur la courbe, les droites sécantes de P et Q_i, pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, se rapprochent de plus en plus de la droite tangente au graphe en P.

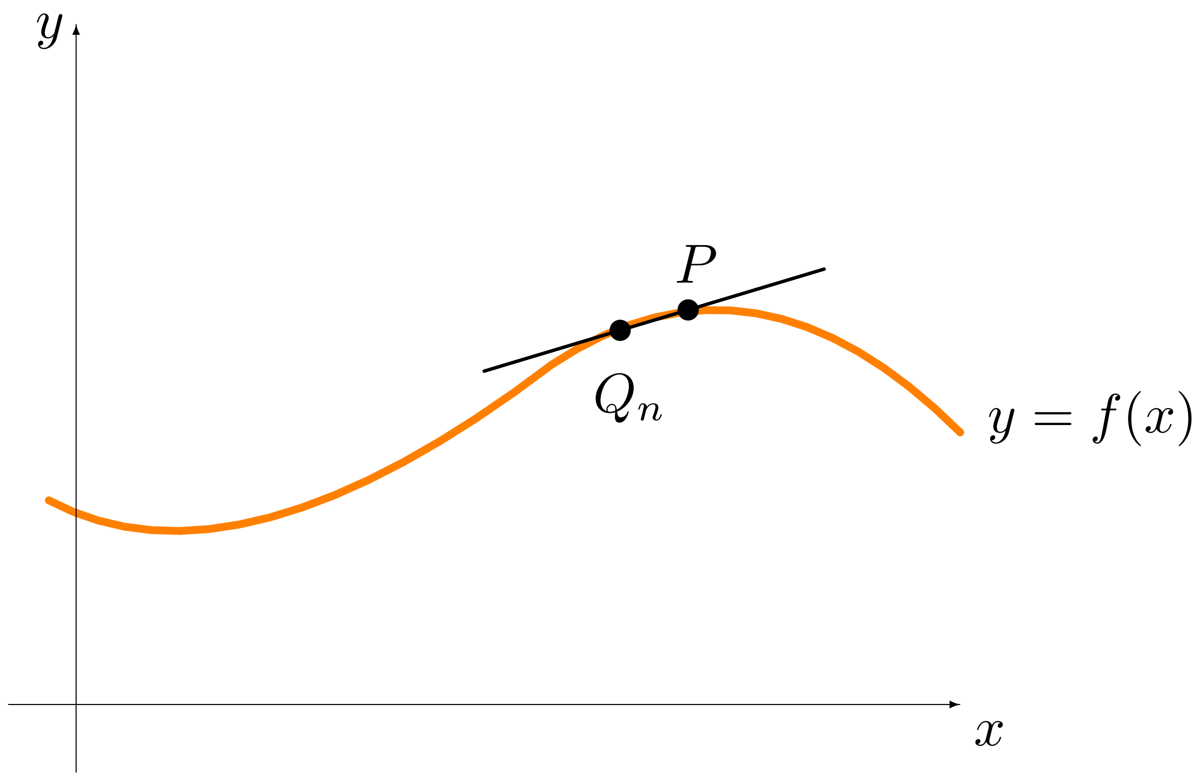
Les pentes des droites sécantes deviennent progressivement de meilleures approximations de la pente de la tengente.

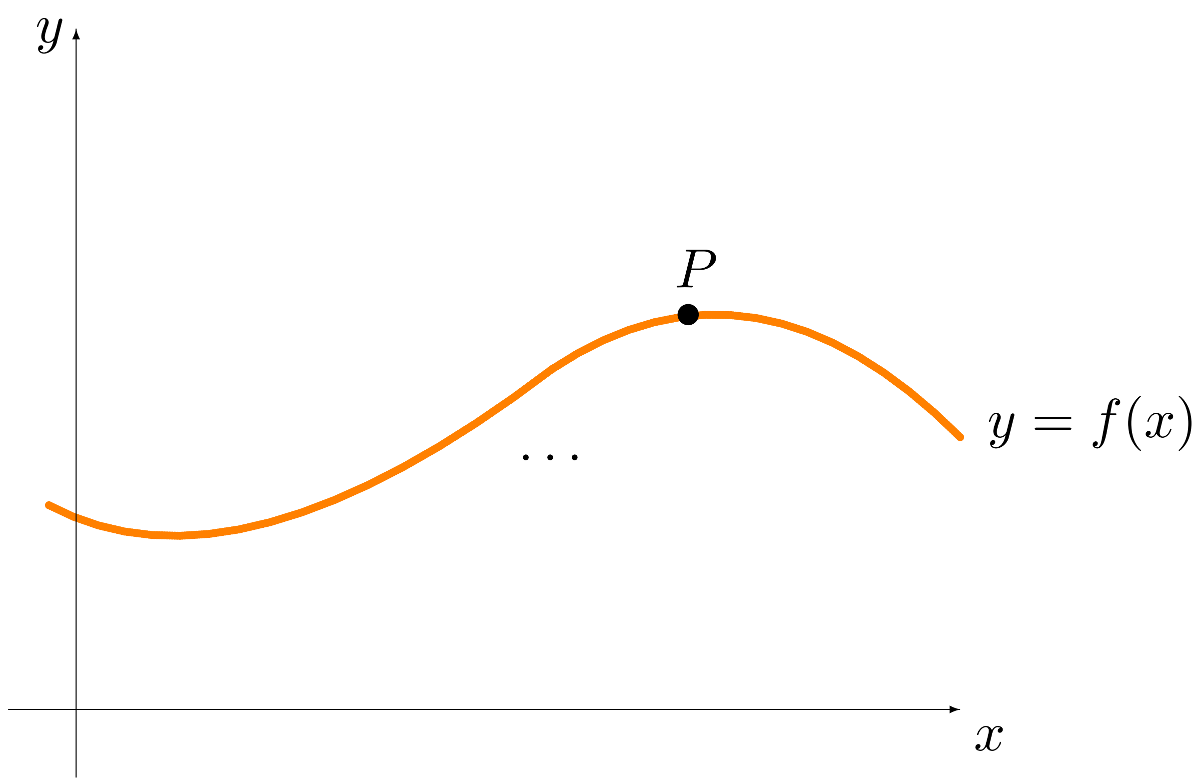

y
P
$y = f(x)$
Q_1
x

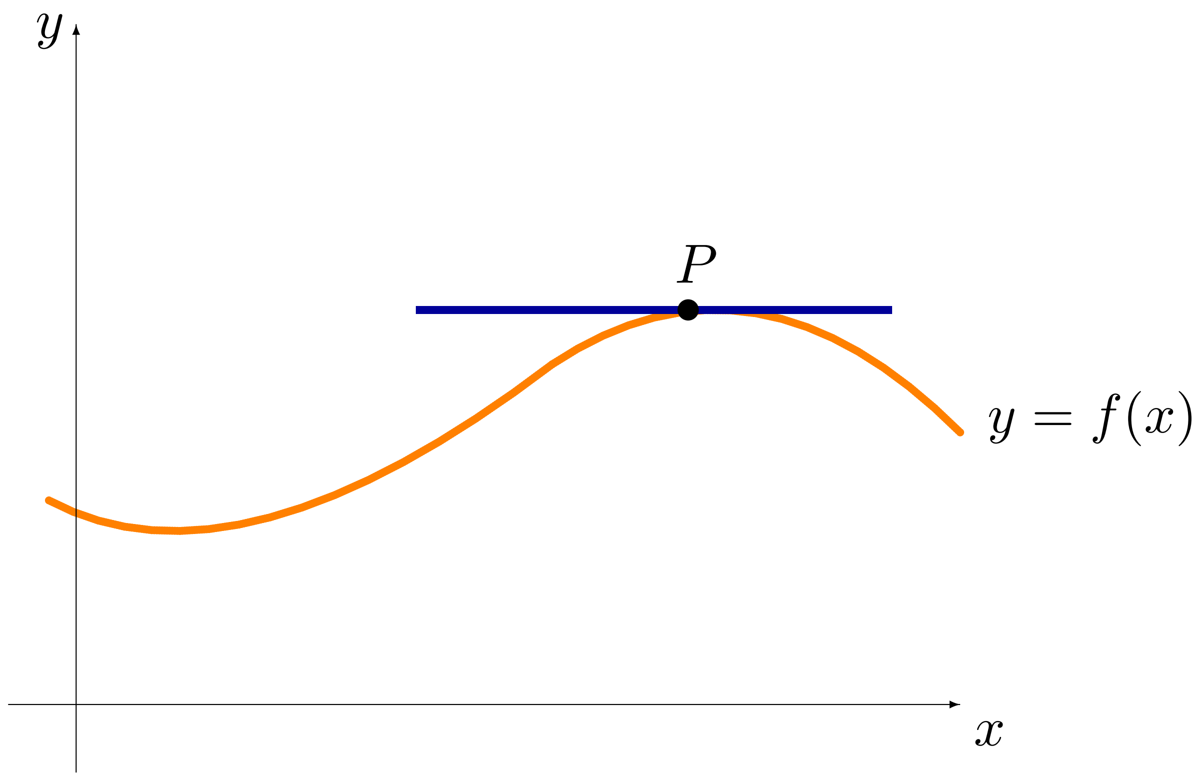

y
P
$y = f(x)$
Q_2
x


y
P
$y = f(x)$
Q_3
x


y
P
$\dots$
$y = f(x)$
x


y
P
Q_n
$y = f(x)$
x


y
P
$y = f(x)$
$\cdots$
x


y
P
$y = f(x)$
x

La droite tangente

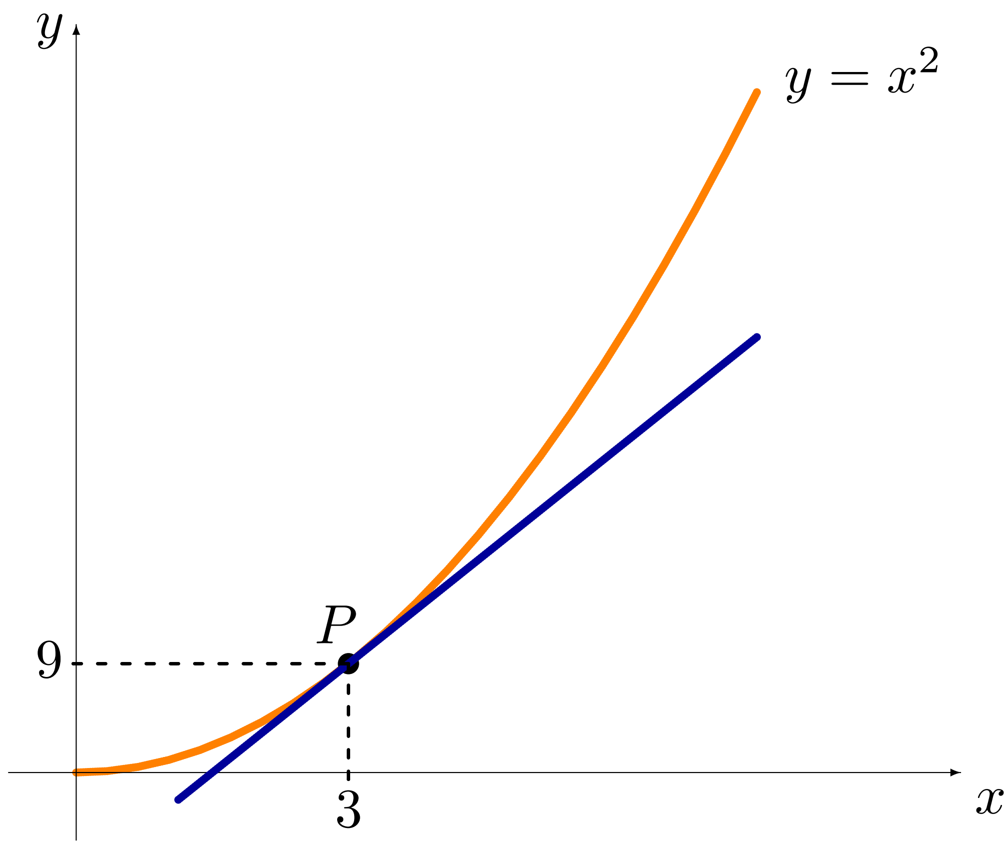
La pente de la droite tangente est une valeur vers laquelle nous nous rapprochons progressivement, sans jamais exactement y arriver.

En effet, deux points distincts sont toujours nécéssaires afin de calculer la pente de l'approximation sécante.

Dans le language du calcul que nous allons développer, on écrit que

$$m_{PQ_n} = \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \to m_{\text{tg}} = f'(a) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Exemple: calculer la pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ en $P(3, 9)$.



y
$y = x^2$
P
9
3
x

Solution: soit $Q(x^*, y^*)$ un point sur la parabole près de P.

L'abscisse de Q peut s'écrire

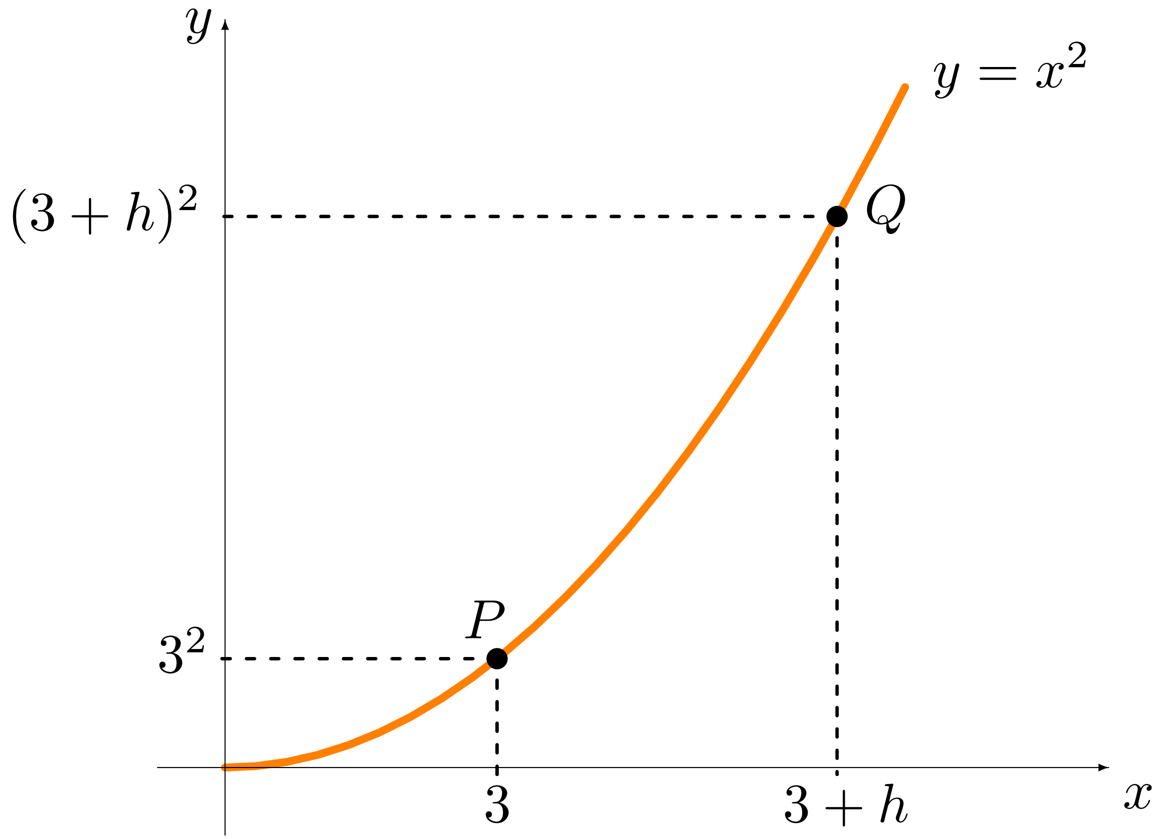
$$x^* = 3 + h, \quad \text{où } h \neq 0 \text{ est positif ou négatif.}$$

Puisque $Q(3 + h, y^*)$ se trouve sur la parabole $y = x^2$, l'ordonnée de Q peut s'écrire

$$y^* = (x^*)^2 = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Autrement dit, il existe un $h \neq 0$ (positif ou négatif) tel que

$$Q(x^*, y^*) = Q(3 + h, (3 + h)^2) = Q(3 + h, 9 + 6h + h^2).$$


y
$y = x^2$
$(3+h)^2$
Q
P
3^2
3
$3+h$
x

L'inconnue h détermine la position de Q.

Plus h est petit en magnitude, plus Q est près de P et plus la pente de la sécante de P et Q est une bonne approximation de la pente recherchée.

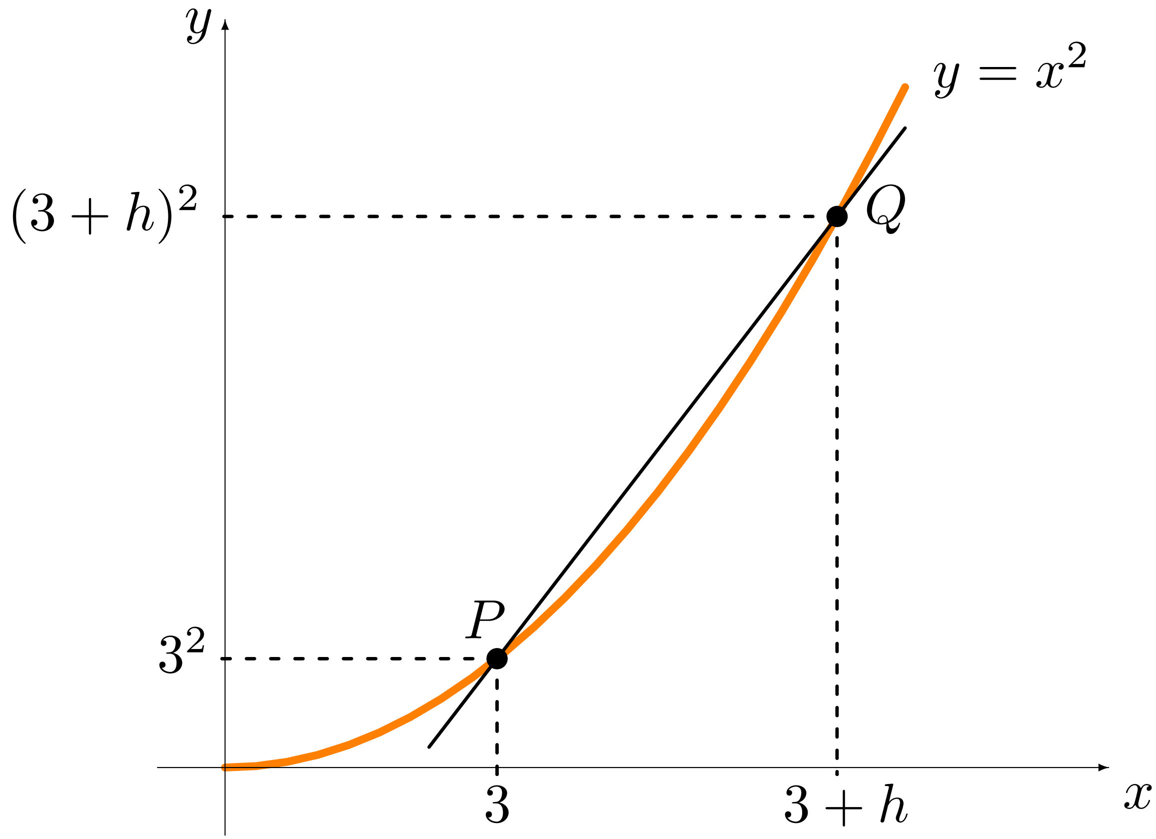
Lorsque Q se rapproche de P sur la parabole, la valeur de h se rapproche de 0, **sans jamais l'atteindre**, ce qui est dénoté par $h \to 0$.

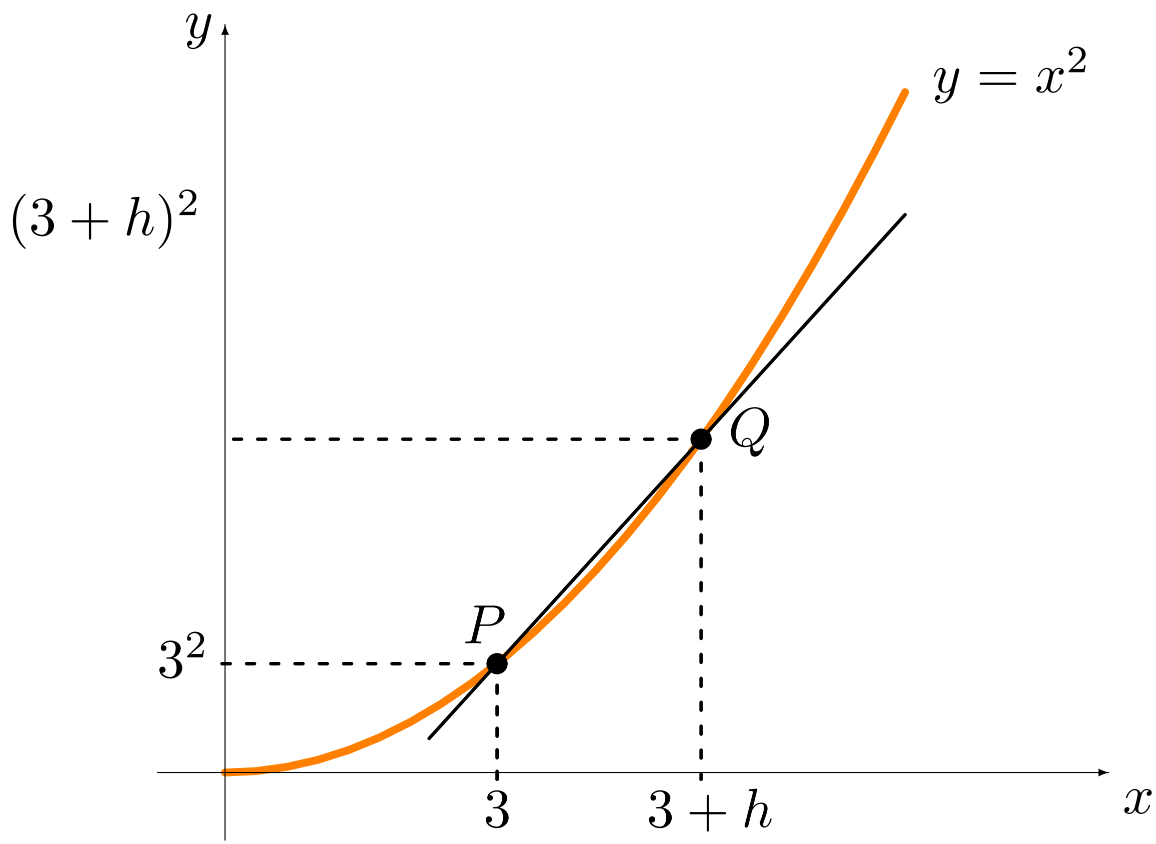
La différence entre les abscisses de P et Q est

$$\Delta x = x_Q - x_P = (3 + h) - 3 = h$$

et la différence entre les ordonnées de P et Q est

$$\Delta y = y_Q - y_P = (3 + h)^2 - 9 = 9 + 6h + h^2 - 9 = 6h + h^2.$$


y
$y = x^2$
$(3+h)^2$
Q
P
3^2
3
$3+h$
x


y
$y = x^2$
$(3+h)^2$
Q
P
3^2
3
$3+h$
x

La pente de la sécante de P et Q est alors

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h, \; h \neq 0.$$

Lorsque $h \to 0$, $Q \to P$ le long de la parabole, et $m_{PQ} \to m_{\text{tg}}$.

La pente de la droite tangente est donc

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (6 + h).$$

Lorsque $h \to 0$, $(6 + h) \to 6$ d'où $m_{\text{tg}} = 6$. La pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ en $P(3, 9)$ est alors 6 (> 0).

L'écart h ne doit pas nécéssairement être positif. La méthode fonctionne également lorsque l'on utilise des valeurs négatives de h.

Ce qui équivaut à dire que le point Q se rapproche de P vers la gauche.

Remarques:

- La pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $P(3, 9)$ est positive; que peut-on dire au sujet du graphe de $y = x^2$ lorsque x est près de 3?

- Soit $f'(x) = 2x$. Quelle est la valeur de $f'(3)$? Est-ce significant?

La méthode générale

La méthode utilisée pour trouver la pente de la droite tangente à l'exemple précédent est **générale**: elle ne dépend pas des propriétés de la courbe.

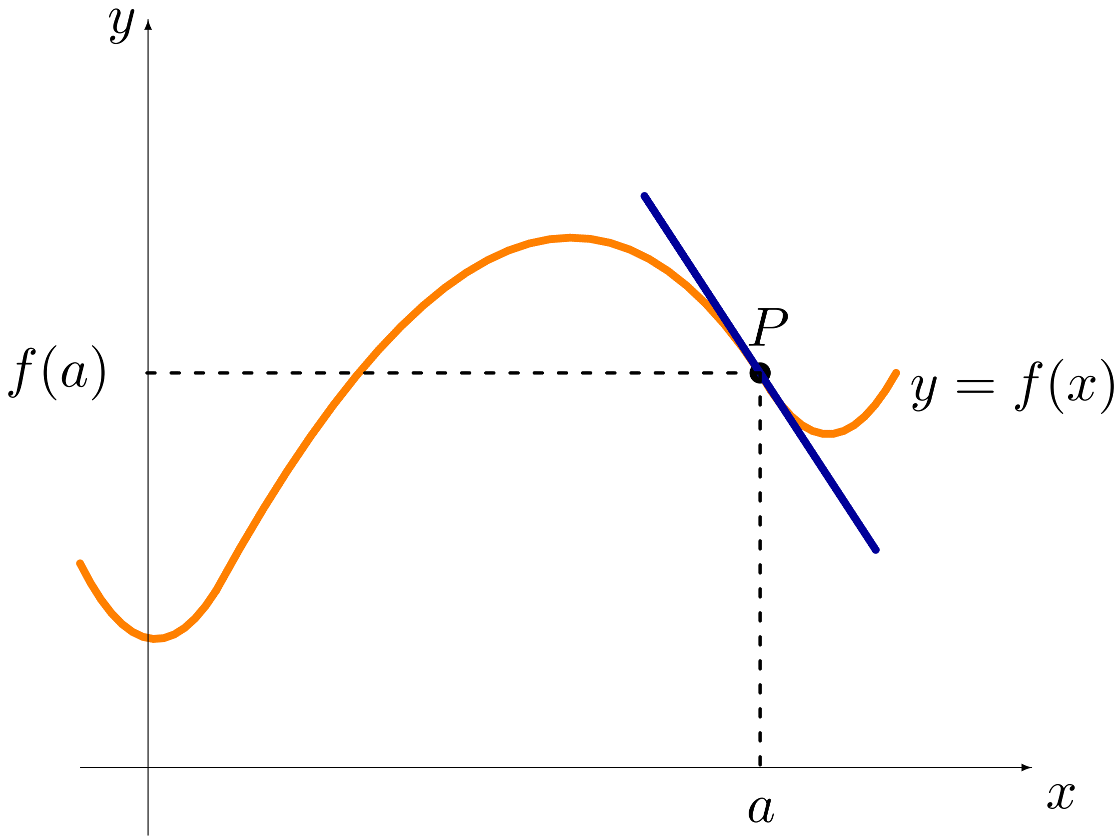
On obtient la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ en $P(a, f(a))$ en supposant que $Q(x^*, y^*)$ un point sur la courbe près de P.

L'abscisse de Q peut s'écrire

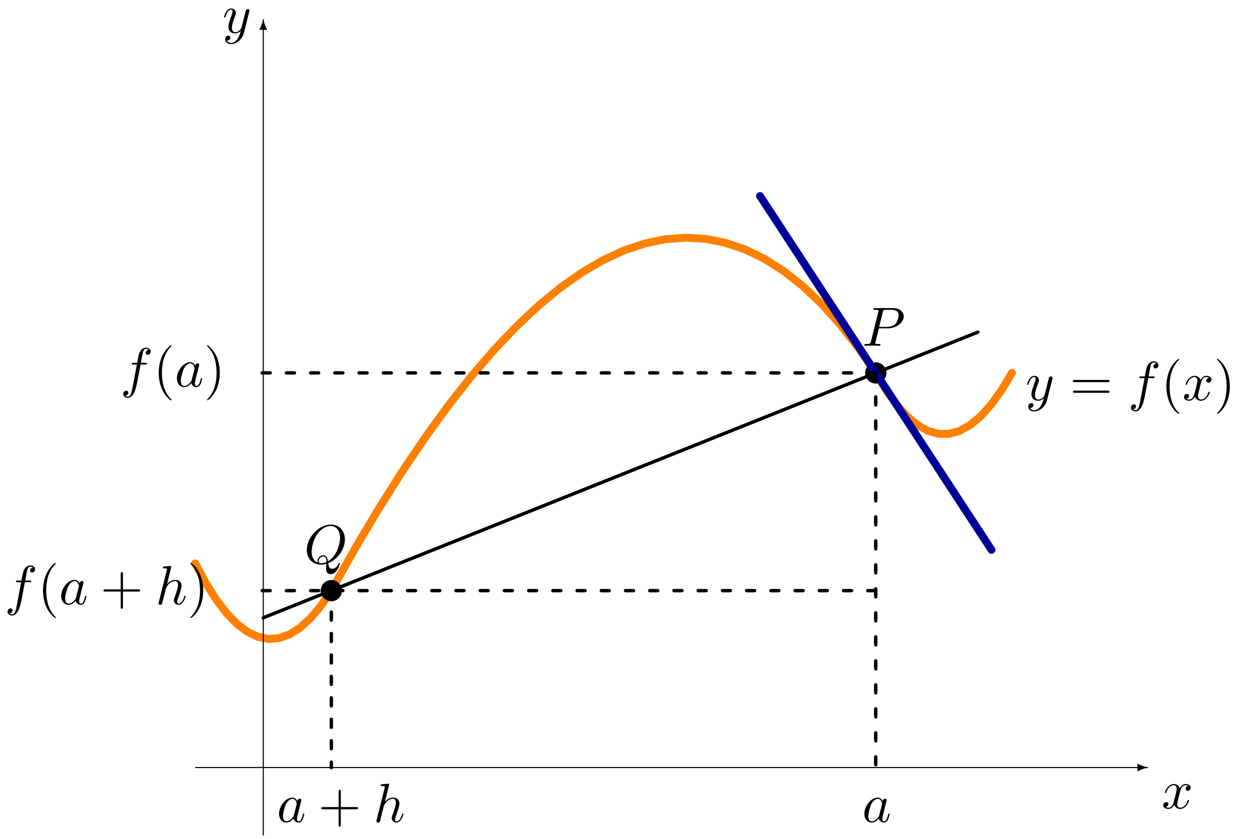
$$x^* = a + h, \quad \text{où } h \neq 0 \text{ est positif ou négatif.}$$

Puisque $Q(a + h, y^*)$ se trouve sur la courbe $y = f(x)$, l'ordonnée de Q peut s'écrire

$$y^* = f(x^*) = f(a + h).$$



y
$f(a)$
P
$y = f(x)$
a
x


y
$f(a)$
P
$y = f(x)$
Q
$f(a+h)$
$a+h$
a
x

Autrement dit, il existe un $h \neq 0$ (positif ou négatif) tel que

$$Q(x^*, y^*) = Q(a + h, f(a + h)).$$

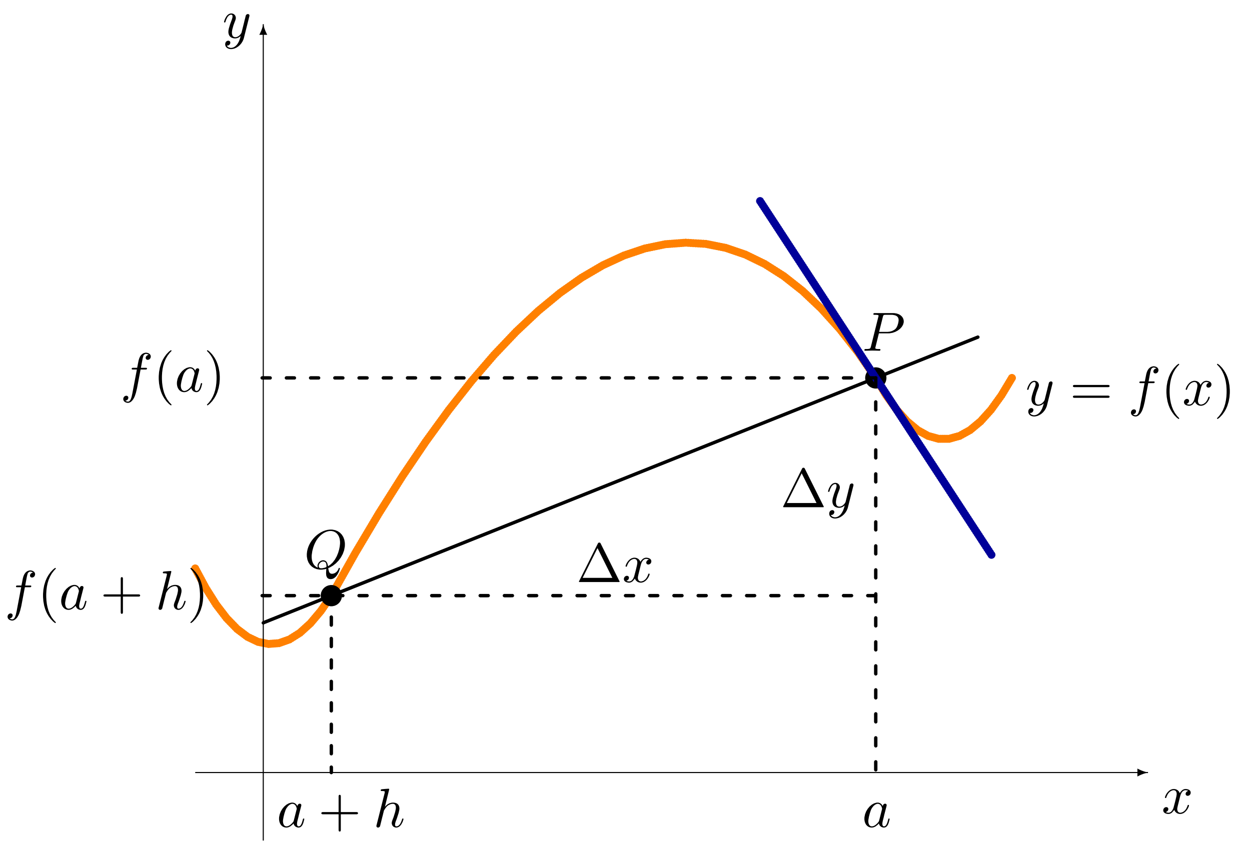
Les différences entre les abscisses et les ordonnées de P et Q sont

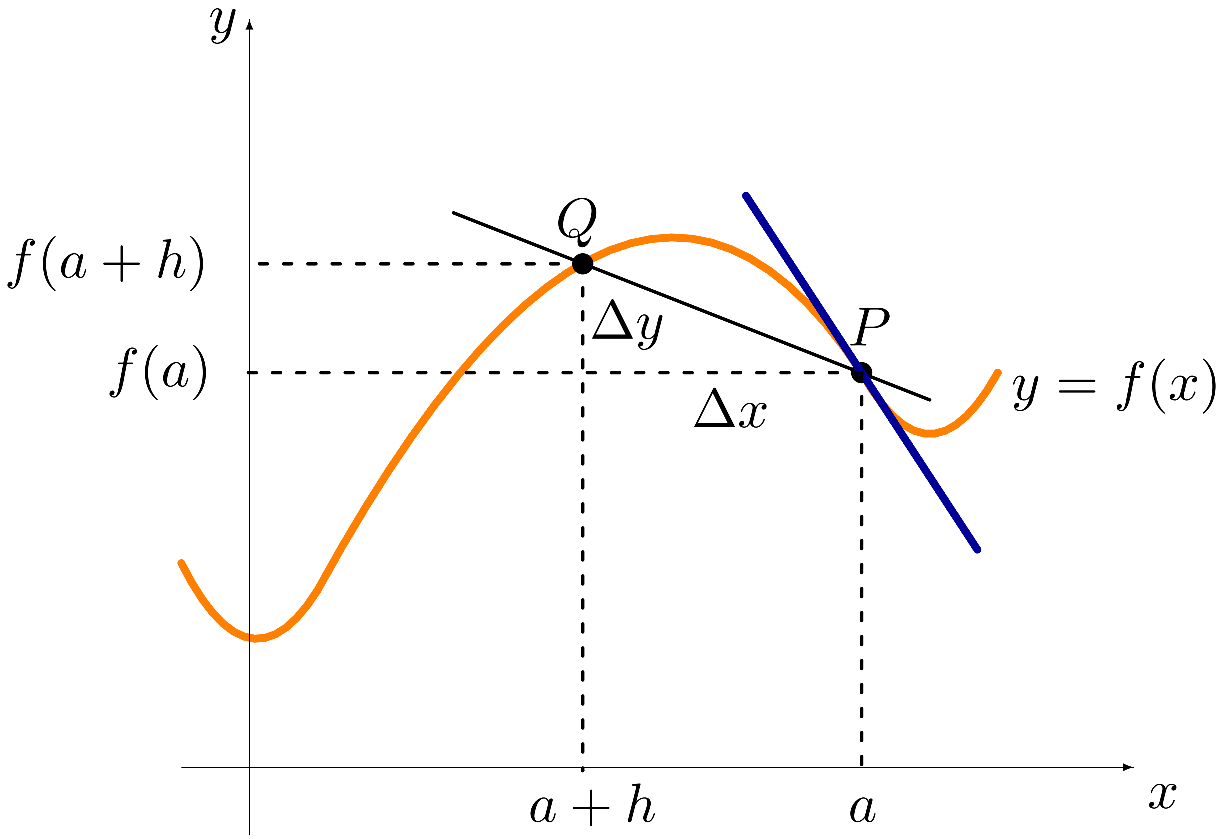
$$\Delta x = (a + h) - a = h \quad \text{et} \quad \Delta y = f(a + h) - f(a).$$

La pente de la sécante de P et Q est alors

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad \text{où } h \neq 0.$$

Cette expression est fondamentale en calcul différentiel et porte le nom de **quotient différentiel**.


y
x
$f(a)$
$f(a+h)$
P
Q
$y = f(x)$
Δy
Δx
$a + h$
a


y
Q
$f(a+h)$
Δy
P
$f(a)$
Δx
$y = f(x)$
$a + h$
a
x

Le quotient différentiel doit généralement être simplifié afin de faciliter les calculs ultérieurs.

Lorsque Q se rapproche de P sur la courbe $y = f(x)$, $h \to 0$.

La pente de la droite tangente au graphe $y = f(x)$ en $P(a, f(a))$ est la **valeur limite des quotients différentiels** $\Delta y/\Delta x$ lorsque $Q \to P$:

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple: calculer la pente de la tangente à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ en $P(\frac{1}{2}, 2)$.

Nous utilisons la formule avec $f(x) = 1/x$, $a = \frac{1}{2}$ $f(a) = 2$ et

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h} = \frac{1}{\frac{1}{2}+h}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-2(\frac{1}{2}+h)}{\frac{1}{2}+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(\frac{1}{2}+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\frac{1}{2}+h} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4 < 0
\end{aligned}$$

La pente de la tangente à l'hyperbole $y = 1/x$ en $P(\frac{1}{2}, 2)$ est -4 (< 0).

Cette approche existe depuis ~ 250 ans, mais elle est encombrante.

On utilise plutôt des techniques de calcul de la dérivée afin d'obtenir la pente de la droite tangente. Nous en reparlerons au chapitre 5.

⚠ **Une question devrait maintenant vous venir à l'esprit: comment sait-on vraiment que**

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2}{\frac{1}{2}+h} = -4?$$

Nous en reparlerons au chapitre 4.

2.2 – La vitesse et les taux d'accroissement

On exprime des relations entre certaines quantités à l'aide de fonctions:

- le prix de l'essence en fonction du temps;
- la distance parcourue en fonction du temps;
- le taux d'intoxication en fonction du volume d'alcool consommé;
- la valeur d'un investissement après 10 ans en fonction de l'investissement initial, etc.

On décrit ces relations à l'aide d'équations $y = f(x)$. Dans ce contexte:

- la variable **dépendante** (prix de l'essence, distance parcourue, taux d'intoxication, valeur de l'investissement après 10 ans) est dénoté par y;

- la variable **indépendante** (temps, volume d'alcool consommé, investissement initial) est dénoté par x.

Le **taux d'accroissement** mesure la manière dont la variable dépendente varie lorsque la variable indépendente varie; par exemple, si l'on augmente la valeur initiale de l'investissement par $100\$$, de quel montant est-ce que la valeur de l'investissement après 10 ans augmentera?

Le taux d'accroissement se calcule de la même façon que la pente de la droite tangente: avec un quotient différentiel et une limite.

La vitesse d'un objet

La vitesse est un taux d'accroissement familier: un coureur parcourant 10km en 1 heure à une vitesse moyenne de

$$\frac{10 \text{ km}}{1 \text{ heure}} = 10 \text{ km/h}.$$

La **vitesse moyenne** est le quotient de la distance parcourue (Δs) par le temps nécéssaire pour parcourir cette distance (Δt).

La vitesse est rarement constante. Comment savoir si le coureur atteint une vitesse exacte de 2 km/h à un instant donné?

Pour répondre à cette question, il faut connaître la vitesse du coureur à tout instant, c'est-à-dire sa **vitesse instantanée** (ou vitesse, tout court).

L'exemple qui suit illustre la différence entre les deux concepts.

Exemple: On laisse tomber une boule de quille d'une montgolfière se promenant à une altitude de 1350m. Après t secondes, la boule a parcourue une distance de s mètres, où

$$s(t) = 6t^2,\ 0 \leq t \leq 15.$$

1. Quelle est la vitesse moyenne de la boule de quille entre $t = 3$ et $t = 6$?

2. Quelle est sa vitesse moyenne entre $t = 3$ et $t = 3 + \Delta t$, pour $\Delta t \neq 0$?

3. Quelle est sa vitesse instantanée après 3 secondes?

Solution: la distance parcourue après $t = 3$ sec est $s(3) = 6(3)^2 = 54$m.

1. La distance parcourue par la boule après $t = 6$ sec est

$$s(6) = 6(6)^2 = 6 \cdot 36 = 216\text{m.}$$

La distance parcourue par la boule entre $t = 3$ sec et $t = 6$ sec est

$$\Delta s = s(6) - s(3) = 216 - 54 = 162 \text{ m.}$$

Puisque la boule a pris $\Delta t = 6 - 3 = 3$ sec pour parcourir cette distance, la vitesse moyenne de la boule entre $t = 3$ et $t = 6$ est

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{162}{3} = 54 \text{ m/sec.}$$

2. La distance parcourue par la boule après $t = 3 + \Delta t$ sec est

$$s(3 + \Delta t) = 6(3 + \Delta t)^2 = 6\left(9 + 6(\Delta t) + (\Delta t)^2\right)$$
$$= 54 + 36(\Delta t) + 6(\Delta t)^2 \text{ m.}$$

La distance parcourue par la boule entre $t = 3$ sec et $t = 3 + \Delta t$ sec est

$$\Delta s = s(3 + \Delta t) - s(3) = 54 + 36(\Delta t) + 6(\Delta t)^2 - 54 = 36(\Delta t) + 6(\Delta t)^2 \text{ m.}$$

Puisque la boule prend Δt sec pour parcourir cette distance, sa vitesse moyenne entre $t = 3$ et $t = 3 + \Delta t$ est

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36(\Delta t) + 6(\Delta t)^2}{\Delta t} = 36 + 6\Delta t \text{ m/sec.}$$

3. Nous pouvons utiliser la formule trouvée en 2. pour calculer la vitesse instantanée de la boule après $t = 3$ secondes.

   La vitesse moyenne $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sur l'intervalle de temps de $t = 3$ à $t = 3 + \Delta t$ est une approximation de la vitesse instantanée après 3 secondes $v(3)$.

   Lorsque $\Delta t \to 0$, la vitesse moyenne $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se rapproche de la vitesse instantanée $v(3)$. Ainsi,

$$v(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (36 + 6(\Delta t)) = 36 \text{ m/sec.}$$

   La vitesse de la boule de quille après 3 secondes est donc de 36 m/sec.

Généralisation

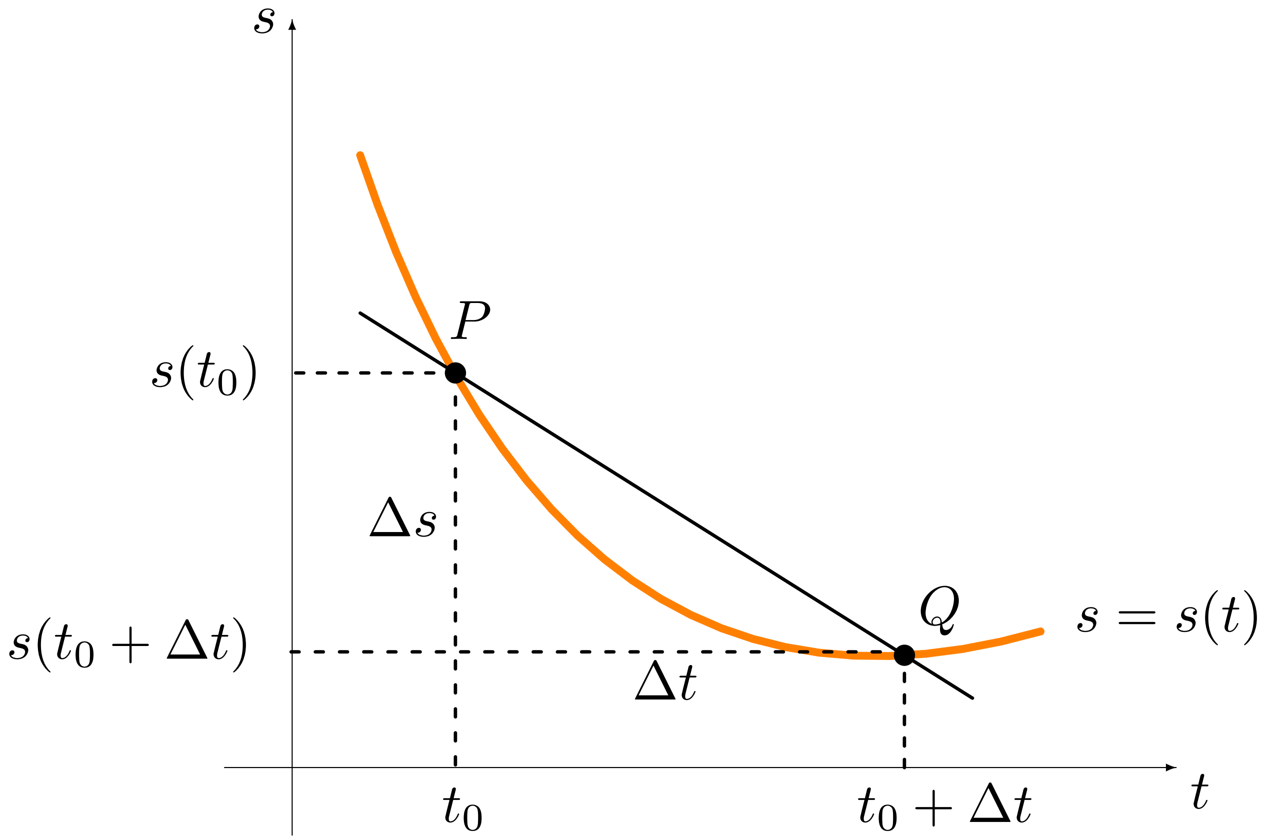
Si la position d'un objet qui se déplace en ligne droite est donnée par $s(t)$ au temps t, la différence de position durant un intervalle de temps Δt débutant à t_0 (sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \Delta t]$) est donnée par

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

La **vitesse moyenne** de l'objet sur cet intervalle est donc

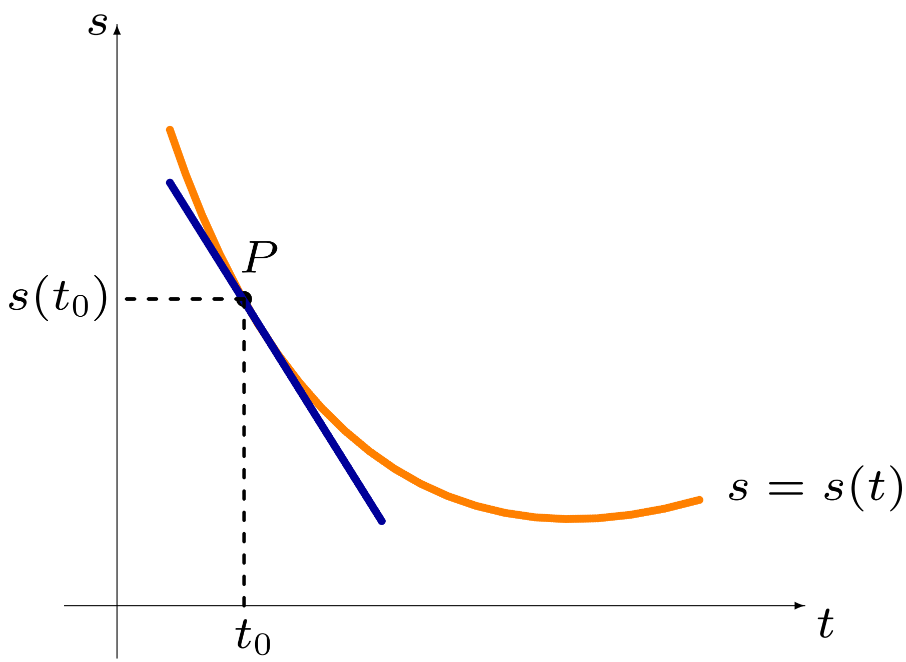
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

C'est un quotient différentiel; la vitesse moyenne de l'objet sur l'intervalle est la **pente de la sécante** de $P(t_0, s(t_0))$ à $Q(t_0 + \Delta t, s(t_0 + \Delta t))$.


s
P
$s(t_0)$
Δs
Q
$s = s(t)$
$s(t_0 + \Delta t)$
Δt
t_0
$t_0 + \Delta t$
t

Lorsque $\Delta t \to 0$, la pente m_{PQ} se rapproche de la pente $m_{\text{tg}}(P)$, c'est-à-dire de la vitesse instantanée de l'objet $v(t_0)$ au temps t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$



Correspondance entre la géométrie et vitesse

géométrie		**vitesse**
x, a, h (ou Δx), y	$\leftrightsquigarrow$	$t, t_0, \Delta t, s$
pente de la sécante	$\leftrightsquigarrow$	vitesse moyenne
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\leftrightsquigarrow$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$
pente de la tangente	$\leftrightsquigarrow$	vitesse instantanée
$m_{\text{tg}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\leftrightsquigarrow$	$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

Exemple: une trottinette parcours 200 m en 10 sec.; sa distance du point de départ après t sec est donnée par $s(t) = t^2 + 10t$. Quelle est sa vitesse lorsqu'elle termine son parcours?

Solution: on cherche $v(10)$. Soit $\Delta t \neq 0$ un petit intervalle de temps. La variation de position Δs de $t = 10$ à $t = 10 + \Delta t$ est

$$\begin{aligned}\Delta s = s(10+\Delta t) - s(10) &= \big((10+\Delta t)^2 + 10(10+\Delta t)\big) - (10^2 + 10(10)) \\ &= 100 + 20\Delta t + (\Delta t)^2 + 100 + 10\Delta t - 200 = 30\Delta t + (\Delta t)^2.\end{aligned}$$

La vitesse moyenne sur l'intervalle de $t = 10$ à $t = 10 + \Delta t$ est alors

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 30 + \Delta t,$$

d'où la vitesse instantanée de la trottinette au temps $t = 10$ est

$$v(10) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (30 + \Delta t) = 30 \text{ m/sec.}$$

Pour calculer la vitesse de la trottinette à un temps t quelconque, il suffit de remplacer t_0 par t. Soit $\Delta t \neq 0$ un petit intervalle de temps. La variation de position de t à $t + \Delta t$ est

$$\begin{aligned}\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) &= \big((t+\Delta t)^2 + 10(t+\Delta t)\big) - (t^2 + 10t)\\ &= t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 + 10t + 10\Delta t - t^2 - 10t = 10\Delta t + 2t\Delta t + (\Delta t)^2.\end{aligned}$$

La vitesse moyenne entre t et $t + \Delta t$ est alors

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\Delta t + 2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 10 + 2t + \Delta t,$$

d'où la vitesse instantanée de la trottinette au temps t est

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10 + 2t + \Delta t) = 10 + 2t \text{ m/sec.}$$

En substituant $t = 10$ dans l'expression pour $v(t)$, on obtient $v(10) = 30$.

La valeur de t est arbitraire $\Rightarrow v(t)$ représente une fonction: la **vitesse** de la trottinette en fonction du temps. On obtient la vitesse à tout instant t_0 en calculant $v(t_0)$.

Par exemple, la vitesse après 2 sec est $v(2) = 10 + 2(2) = 14$ m/sec.

Discussion: si on modifie le contexte du problème de sorte que $s(t)$ représente le nombre de poissons attrappés par un ours grizzly après t heures, mettons, on ne peut parler de "vitesse."

Dans ce cas, quel sens peut bien avoir l'expression

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}?$$

Les taux d'accroissement

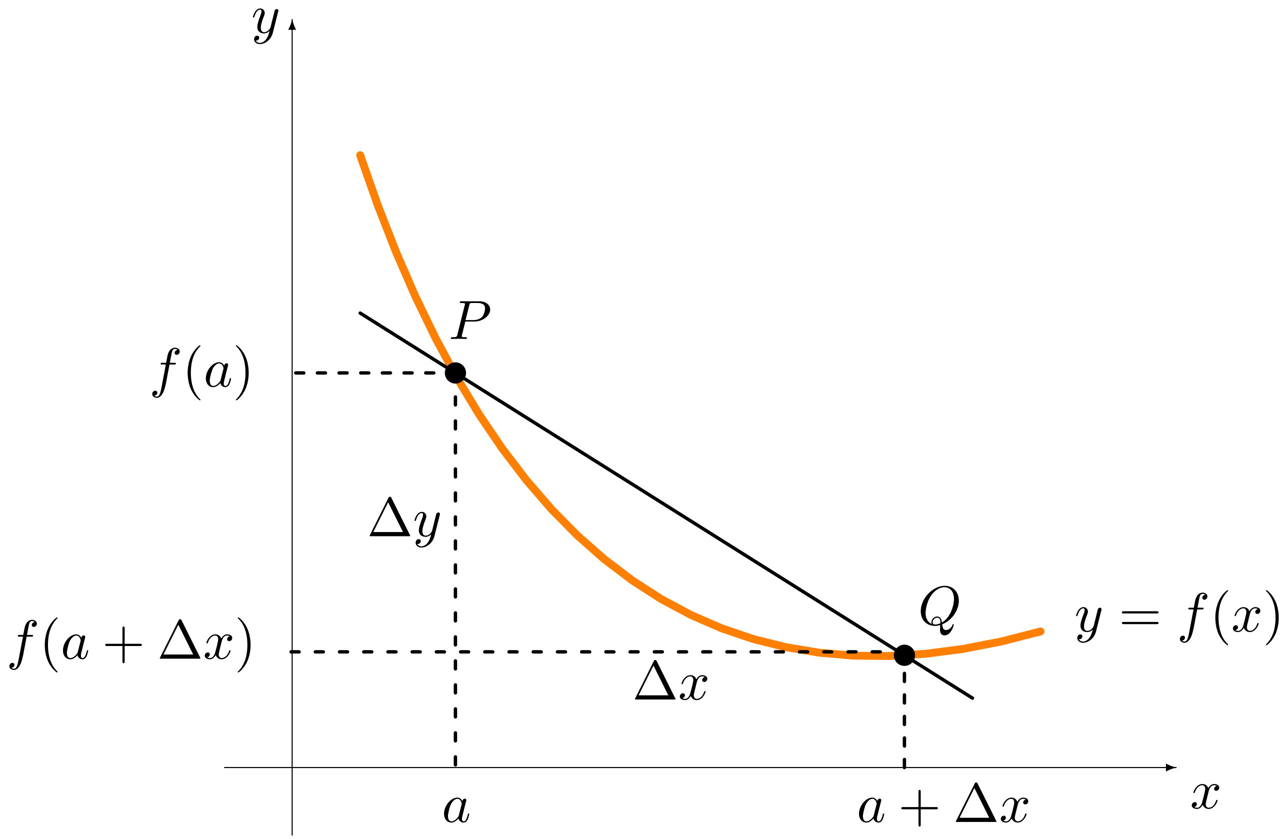
Supposons que y est une fonction de x, $y = f(x)$. Lorsque x varie de a à $a + \Delta x$, où $\Delta x \neq 0$ est petit, la différence des ordonnées est

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Le quotient différentiel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

est le **taux d'accroissement moyen** (l'analogue de la vitesse moyenne) de y par rapport à x entre $x = a$ et $x = a + \Delta x$, ce qui correspond à la **pente de la sécante** entre $P(a, f(a))$ et $Q(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.


y
P
$f(a)$
Δy
Q
$y = f(x)$
$f(a + \Delta x)$
Δx
a
$a + \Delta x$
x

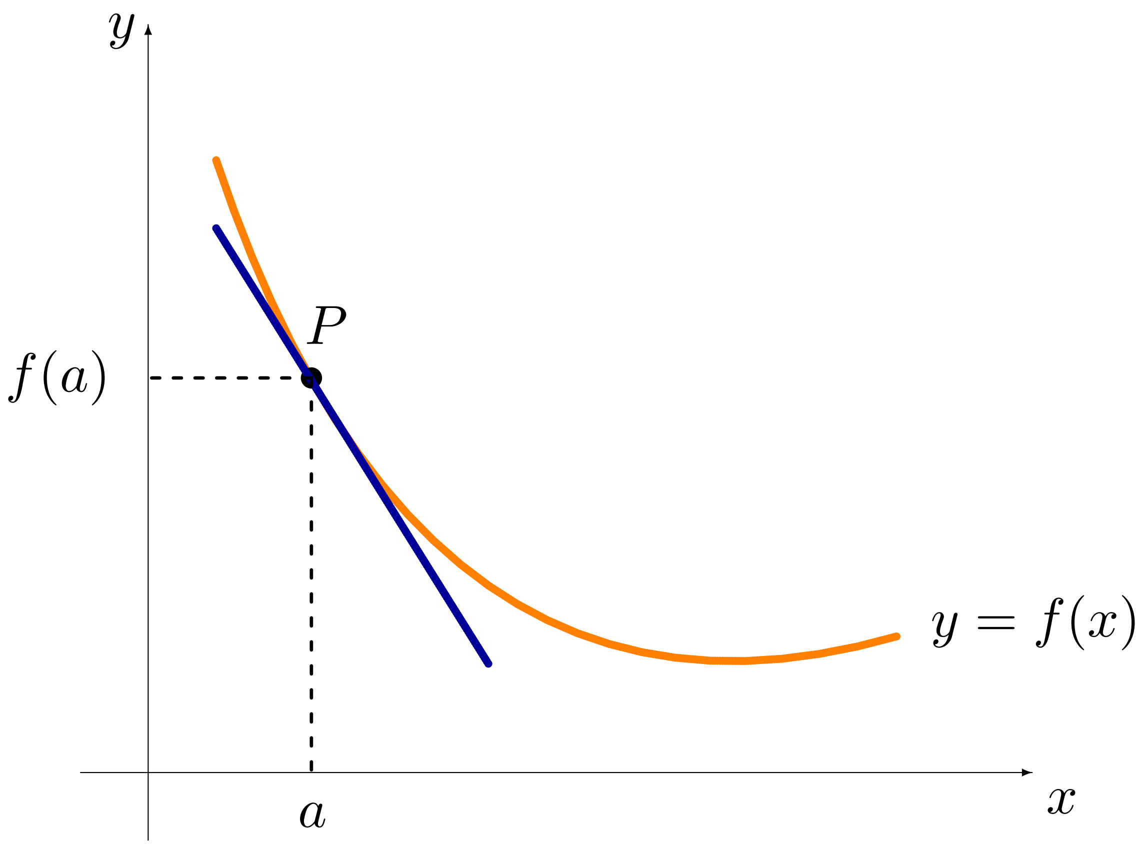
Le **taux d'accroissement instantané** (ou taux d'accroissement, tout cours; l'analogue de la vitesse) de y par rapport à x lorsque $x = a$ est la "valeur limite" du taux d'accroissement moyen lorsque $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Le taux d'accroissement est la **pente de la tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$,

Le taux d'accroissement est toujours une fonction associée à la fonction f originale.

On parle aussi du **taux de variation**: la vitesse est le taux de variation de la distance (par rapport au temps), par exemple.


y
P
$f(a)$
$y = f(x)$
a
x

Exemples:

1. Une patiente reçoit une injection pour se débarasser d'une migraine. Lorsque t heures se sont écoulées (après l'injection), il ne reste que M mg de médicament dans 1mL de son sang, où

$$M(t) = t - \frac{t^2}{3}, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Quel est le taux d'accroissement de M, t heures après l'injection?

Solution: la différence de masse de médicament ΔM de t à $t+\Delta t$, où $\Delta t \neq 0$ est petit, est

$$\begin{aligned}\Delta M &= M(t+\Delta t) - M(t)\\ &= \left((t+\Delta t) - \frac{1}{3}(t+\Delta t)^2\right) - \left(t - \frac{1}{3}t^2\right)\\ &= t + \Delta t - \frac{1}{3}(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - t + \frac{1}{3}t^2\\ &= \Delta t - \frac{2t\Delta t}{3} - \frac{(\Delta t)^2}{3} = \Delta t\left(1 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\Delta t\right).\end{aligned}$$

Le taux d'accroissement moyen de M est donc

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\Delta t(1 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\Delta t)}{\Delta t} = 1 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\Delta t,$$

et le taux d'accroissement de M au temps t est

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(1 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\Delta t\right) = 1 - \frac{2}{3}t \text{ mg/h.}$$

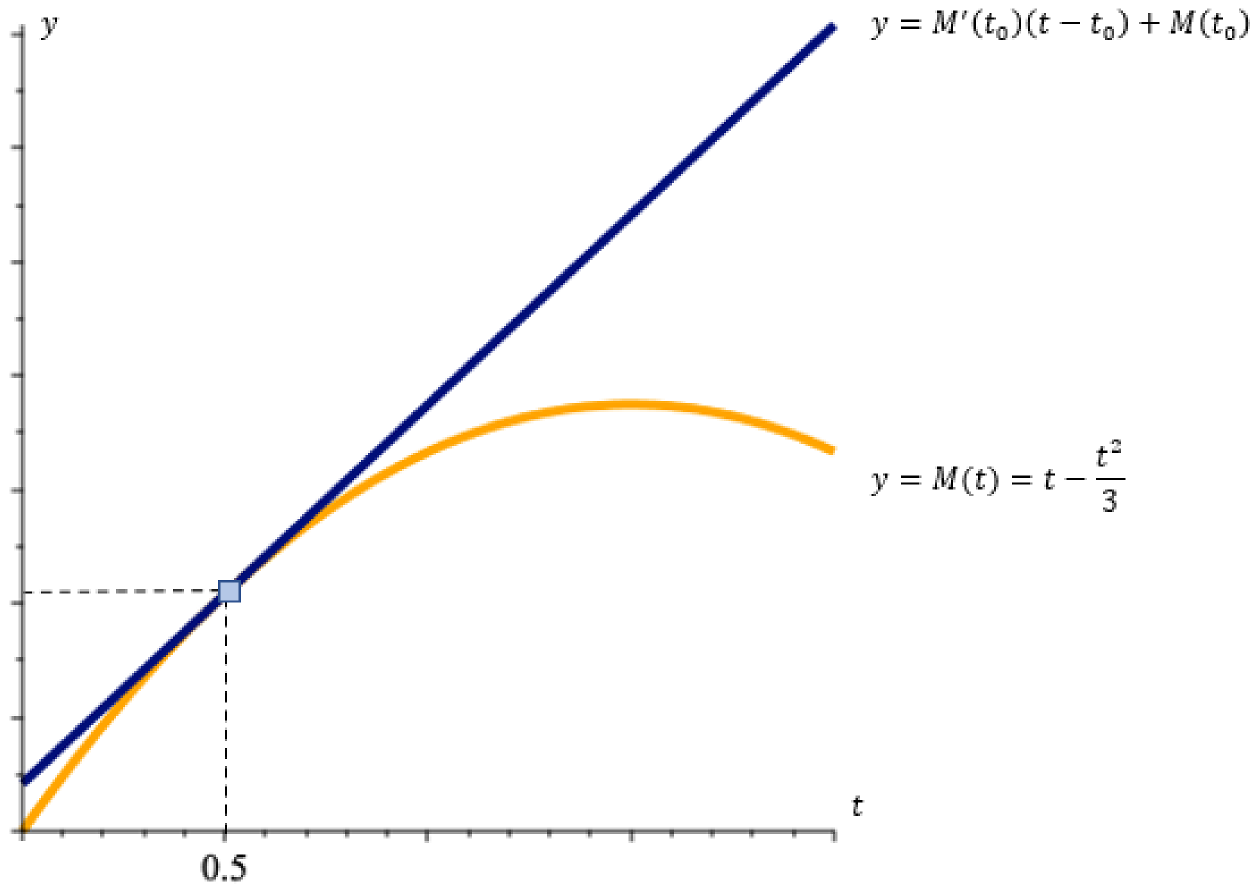
On peut donner une interprétation physique à ce résultat.

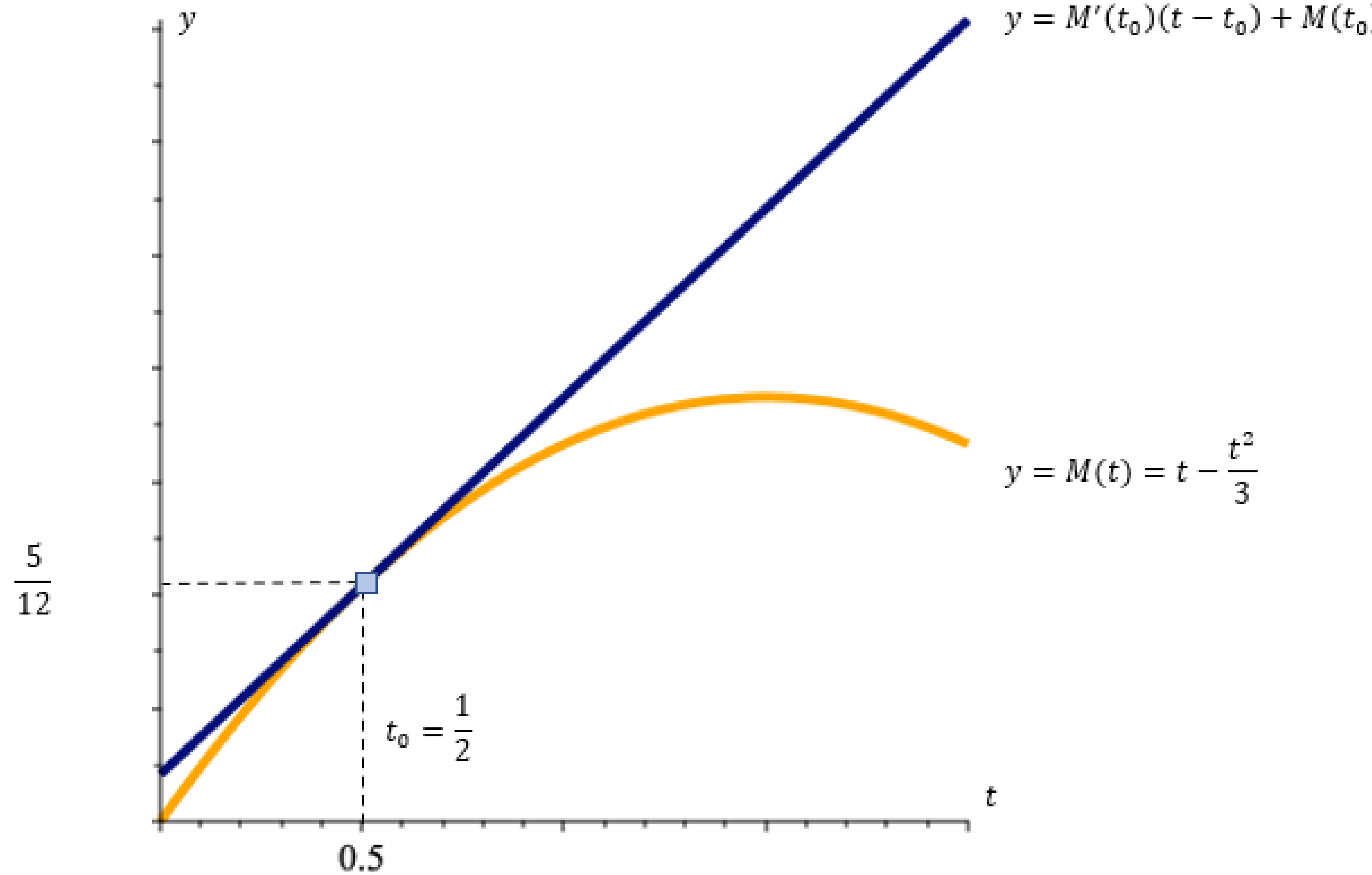
Supposons que $t = 1/2$; la masse M du médicament dans 1mL est

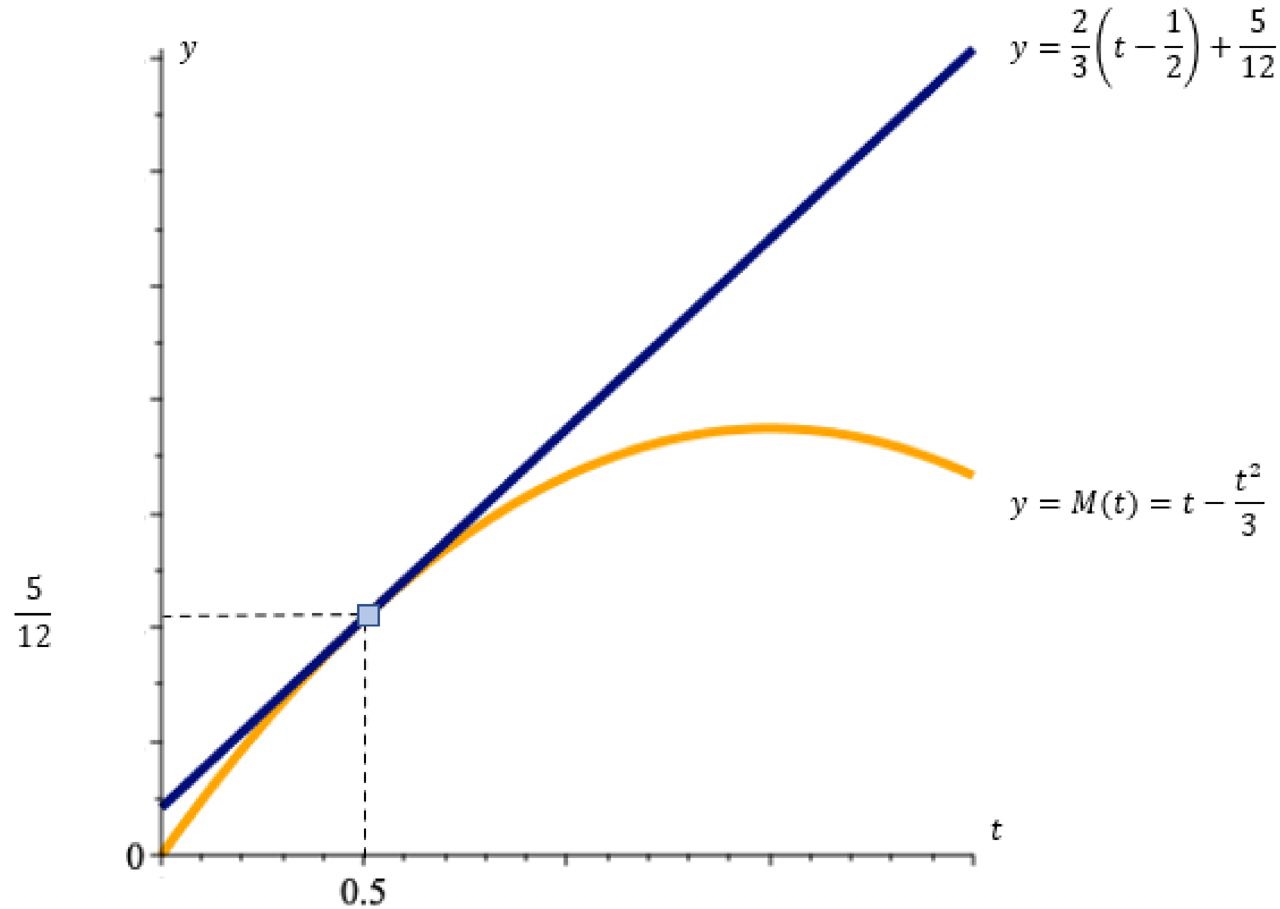
$$M(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(1/2)^2}{3} = \tfrac{5}{12} \text{ mg.}$$

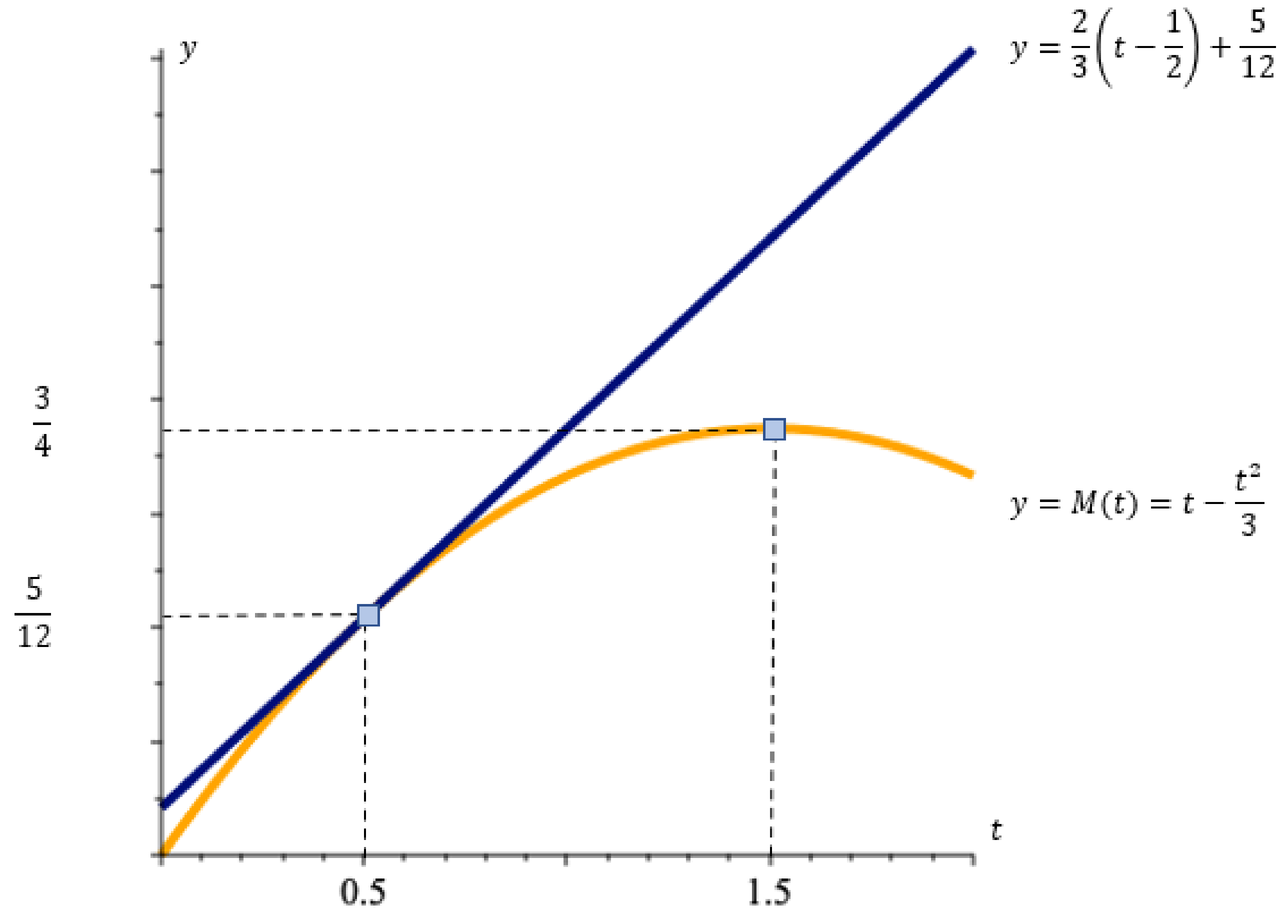
Le taux de variation de M lorsque $t = \frac{1}{2}$ est $1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

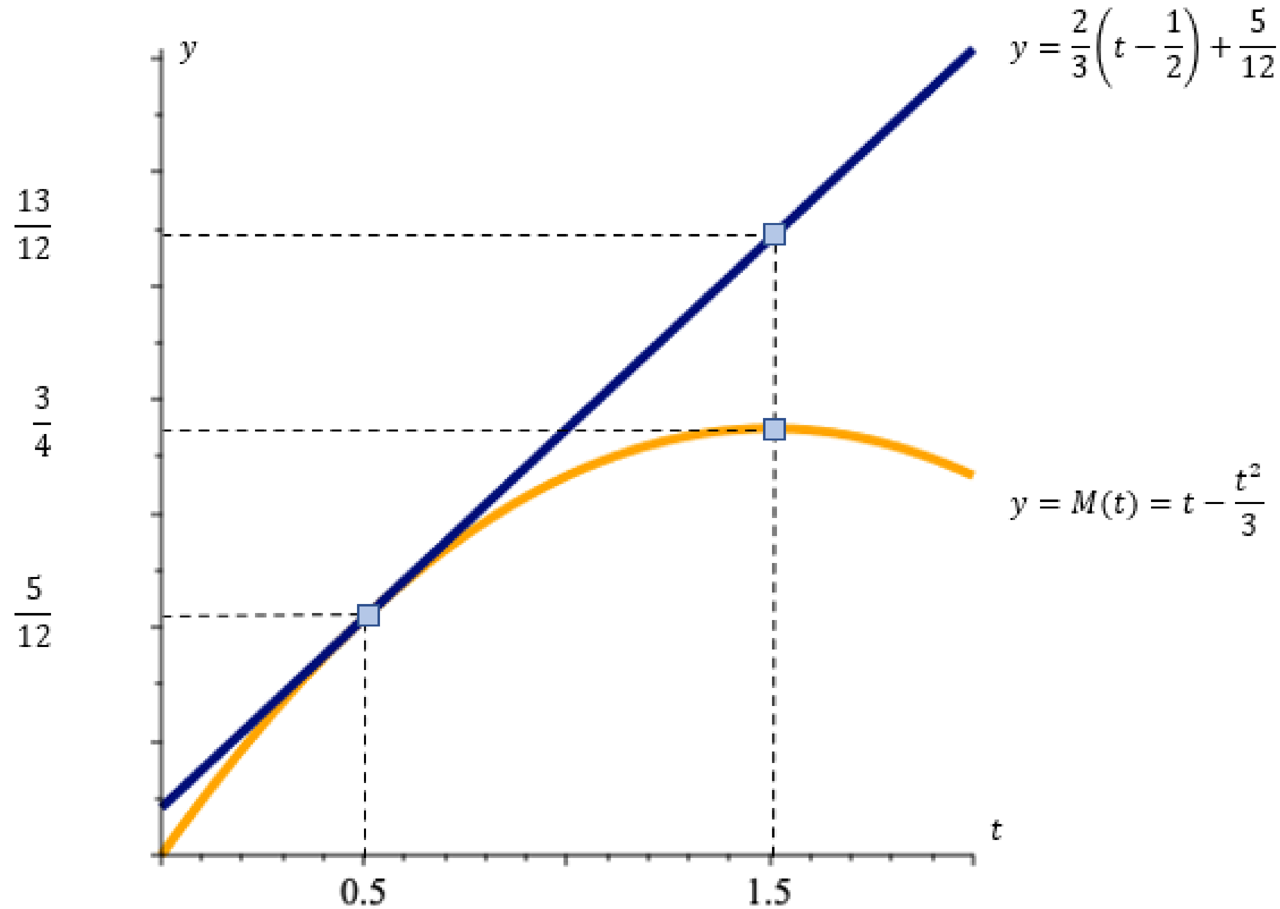
Après $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ heures, la valeur de $M(\frac{3}{2})$ est donc $\approx \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12}$ mg (la valeur réelle est $\frac{3}{4}$ mg).

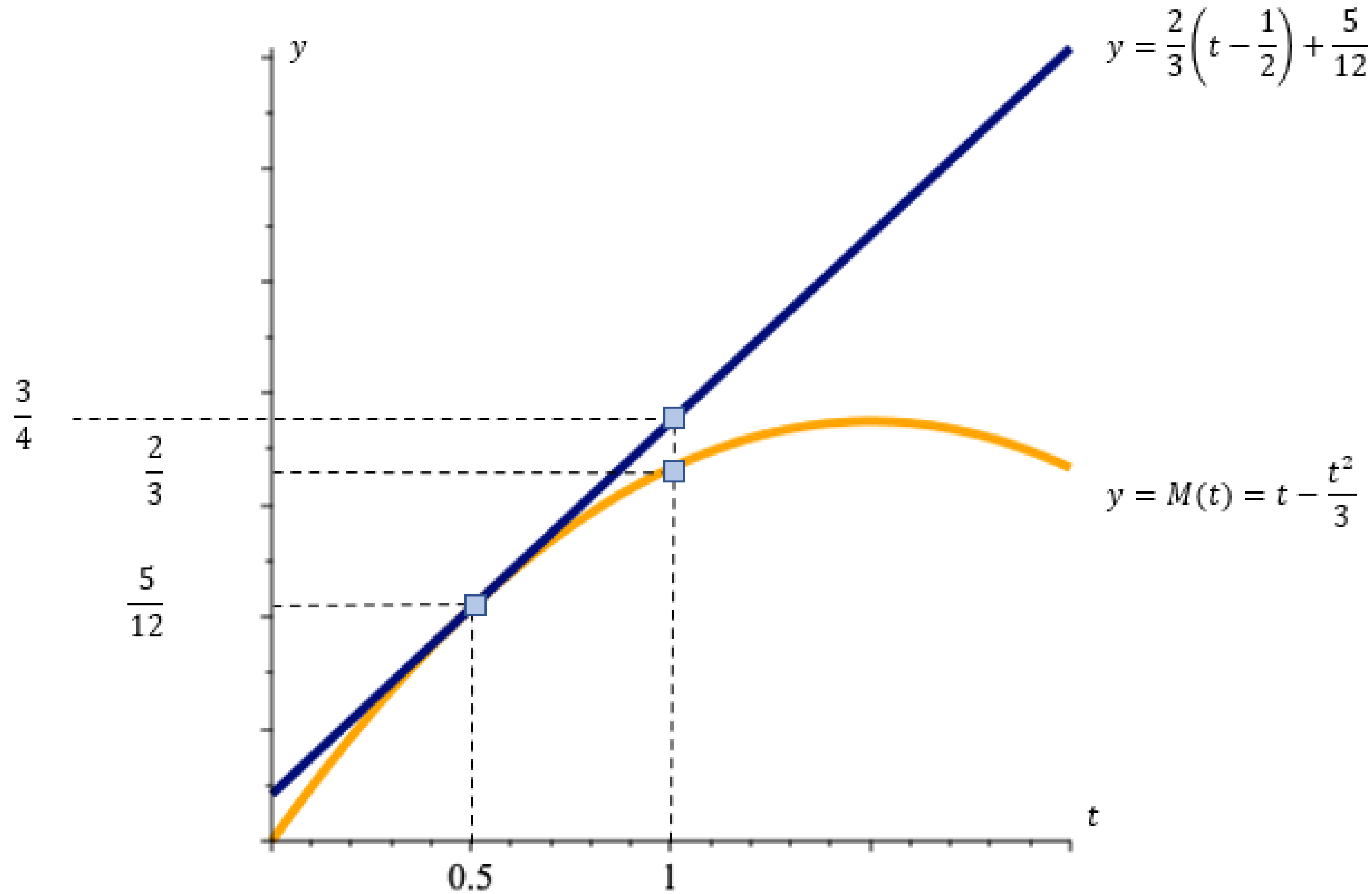

y
$y = M'(t_0)(t - t_0) + M(t_0)$
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
t
0.5


y
$y = M'(t_0)(t - t_0) + M(t_0)$
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
$\frac{5}{12}$
$t_0 = \frac{1}{2}$
t
0.5


$y = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12}$
y
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
$\frac{5}{12}$
t
0
0.5


$y = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12}$
y
$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{12}$
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
t
0.5
1.5


$y = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12}$
y
$\frac{13}{12}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{12}$
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
t
0.5
1.5



$y = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12}$
y
$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{12}$
$y = M(t) = t - \frac{t^2}{3}$
t
0.5
1

2. Calculer le taux de variation de l'aire d'un cercle par rapport à son rayon.

Solution: l'aire d'un cercle de rayon r est $A(r) = \pi r^2$. Alors

$$\begin{aligned}\Delta A &= A(r+\Delta r) - A(r) = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2.\end{aligned}$$

Le taux de variation de l'aire du cercle par rapport au rayon est donc

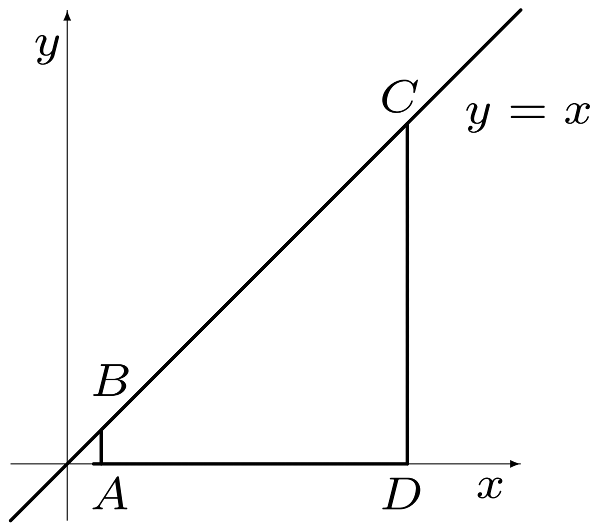
$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}(2\pi r + \pi\Delta r) = 2\pi r;$$

qui se trouve à être la circonférence du cercle (une jolie coincidence).

Scénario – L'aire sous la droite

Exemple: trouver l'aire entre les droites $y = x$ et $y = 0$, de $x = 1$ à $x = 10$.

Solution: la solution est simple si l'on sait calculer l'aire d'un trapèze.



La figure bornée par les droites $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, et $x = 10$ est un trapèze, dont les sommets sont $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(10,10)$ et $D(10,0)$.

La superficie d'un trapèze est $S = \frac{(L+\ell)h}{2}$, où h représente la hauteur, L la base principale, et ℓ la base secondaire.

La hauteur de ce trapèze est la longueur du segment $AD = 9$, sa base principale celle du segment $CD = 10$ et sa base secondaire celle du segment $AB = 1$.

Ainsi, l'aire sous la droite $y = x$ entre 1 et 10 est $\frac{(10+1)\cdot 9}{2} = \frac{99}{2}$.

⚠ **La formule de l'aire que nous avons utilisée est propre au trapèze. Ce n'est pas un méthode générale.**

2.3 – L'aire sous une courbe

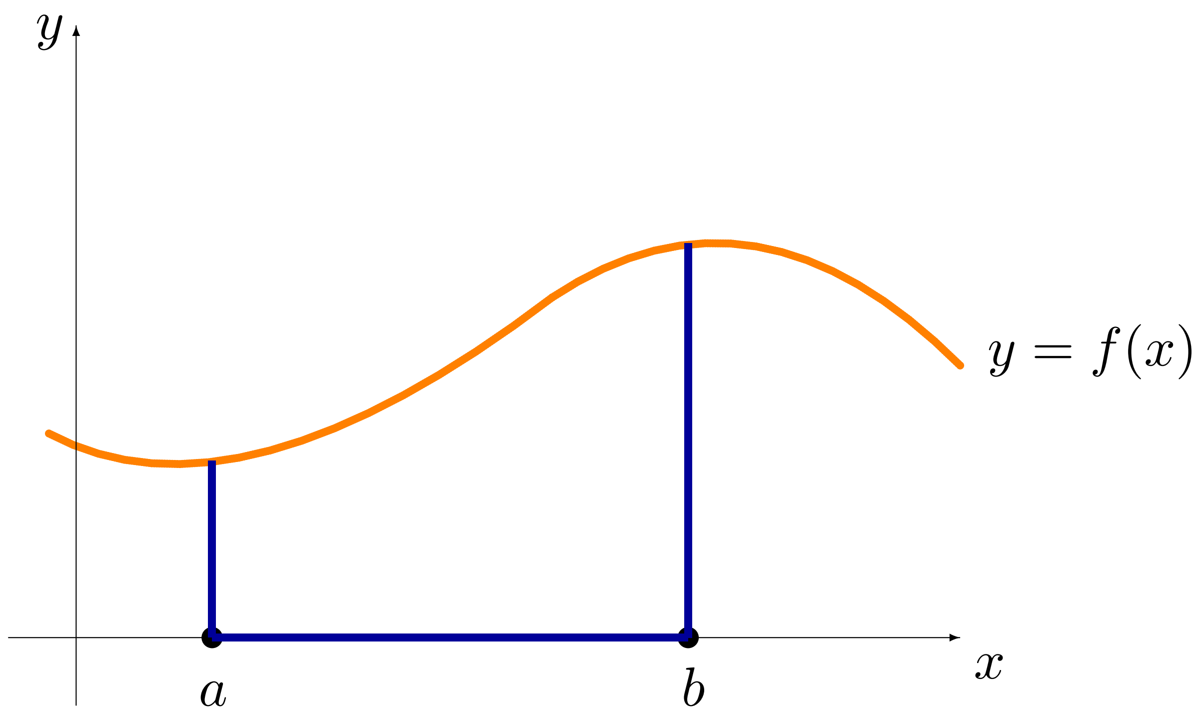
Considérons de nouveau le graphique d'une fonction f reliant une variable indépendente x à une variable dépendente y, c'est-à-dire la courbe tracée par $y = f(x)$.

Soient $a \neq b$ deux valeurs de la variable indépendante x.

L'**aire sous la courbe** est l'aire de la figure bornée par la courbe, l'axe des x, et les droites $x = a$ et $x = b$.

Par convention, si la courbe se retrouve sous l'axe des x, l'aire est négative.

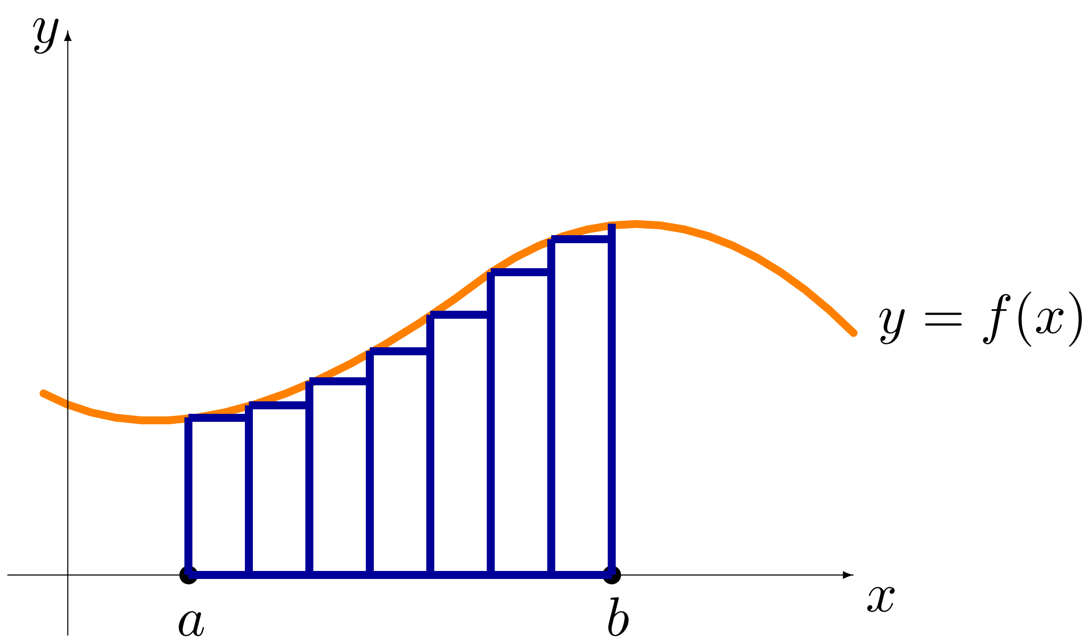
Comment calcule-t-on cette superficie?



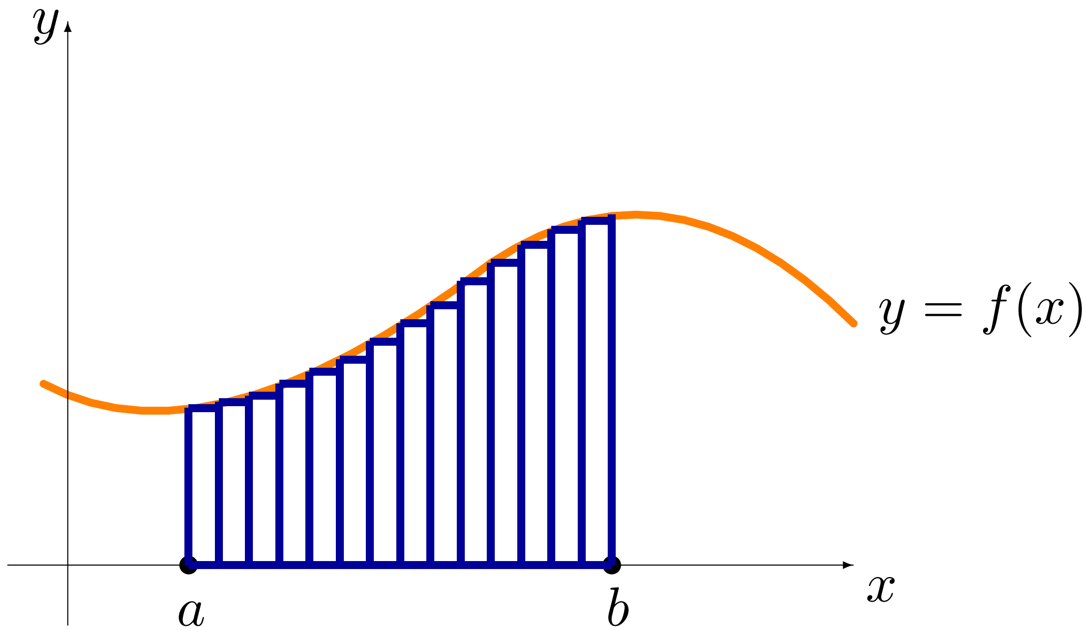
Il est difficile de décrire géométriquement l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre a et b, mais il est facile de le faire pour un **rectangle** (ou un trapèze).

L'approximation par les sommes à gauche

On divise l'intervalle $[a, b]$ en n petits segments de droite égaux. Sur chacun de ces segments de droite, on élève un rectangle dont la hauteur est la valeur de la fonction f évaluée au point le plus à gauche du segment.



La somme des aires de tous les rectangles ainsi formés, que l'on appelle **somme à gauche avec n subdivisions** et dénoté par $\mathrm{SG}(n)$, est une approximation de l'aire recherchée. En augmentant le nombre de sous-divisons, les sommes à gauche deviennent progressivement de meilleures approximations de l'aire sous la courbe.



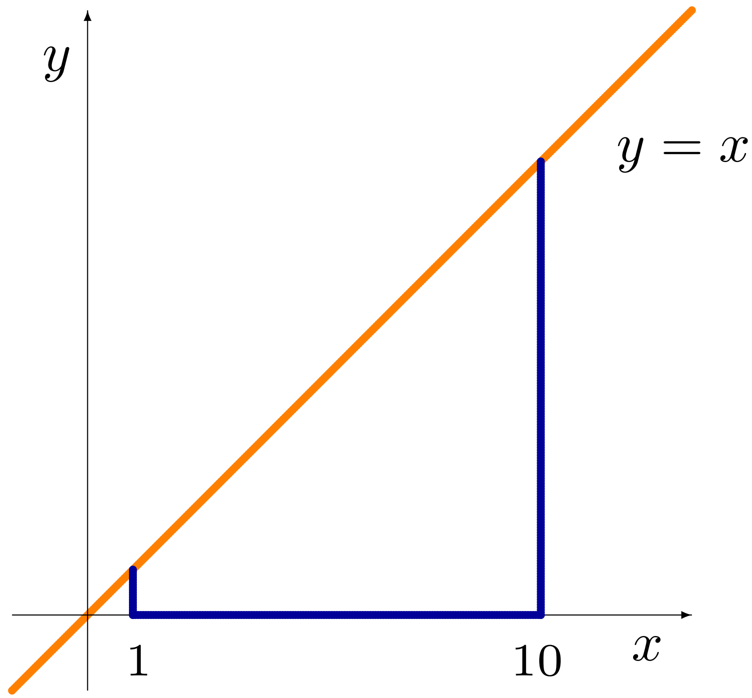
Dans l'illustration qui précède, on s'attend à ce que $\mathrm{SG}(14)$ donne une meilleure approximation de l'aire sous la courbe que $\mathrm{SG}(7)$, et que

$$\text{aire sous la courbe} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{SG}(n).$$

On remarque que l'aire sous la courbe **n'est pas** une somme à gauche $\mathrm{SG}(n)$ (pour un n quelconque); c'est plutôt la valeur vers laquelle les sommes à gauche $\mathrm{SG}(n)$ se **rapproche, sans jamais l'atteindre exactement**, à moins de faire affaire à une fonction $y = f(x)$ particulière (une fonction constante ou une fonction à paliers).

La relation entre la somme à gauche et l'aire sous la courbe est semblable à celle entre la pente de la sécante et la pente de la tangente.

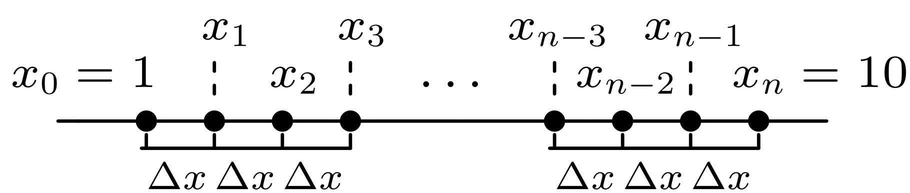
Exemple: trouver l'aire sous la courbe $y = x$ entre $x = 1$ et $x = 10$.


y
y = x
1
10
x

Solution: commençons par subdiviser l'intervalle $[1, 10]$ en n segments égaux, tous de longueur

$$\Delta x = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}.$$

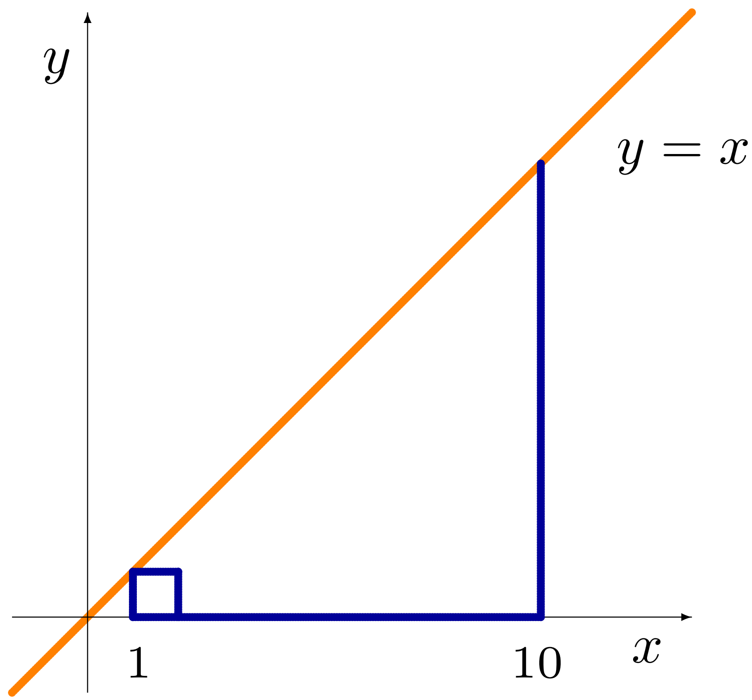
Soit $x_0 = 1$, et $x_n = 10$; on définit $x_i = x_0 + i\Delta x$ pour $i = 1, \ldots, n-1$:



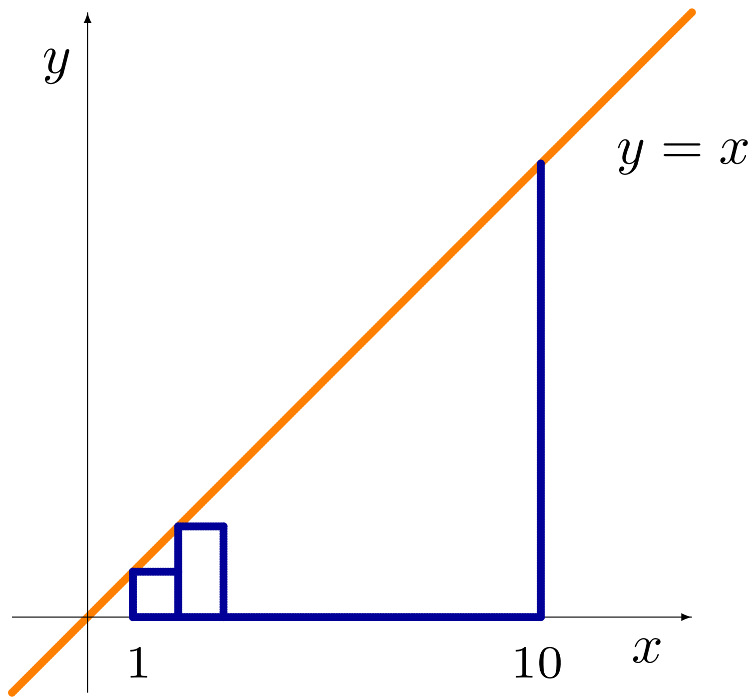
Ainsi

$$x_1 = 1 + \tfrac{9}{n}, \quad x_2 = 1 + 2 \cdot \tfrac{9}{n}, \quad \cdots,$$
$$x_{n-2} = 1 + (n-2)\tfrac{9}{n}, \quad x_{n-1} = 1 + (n-1)\tfrac{9}{n}.$$

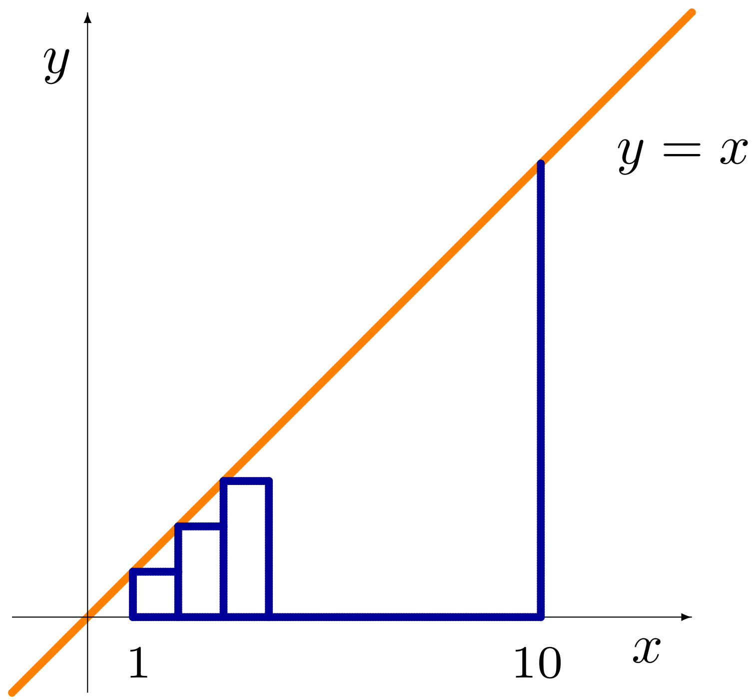
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



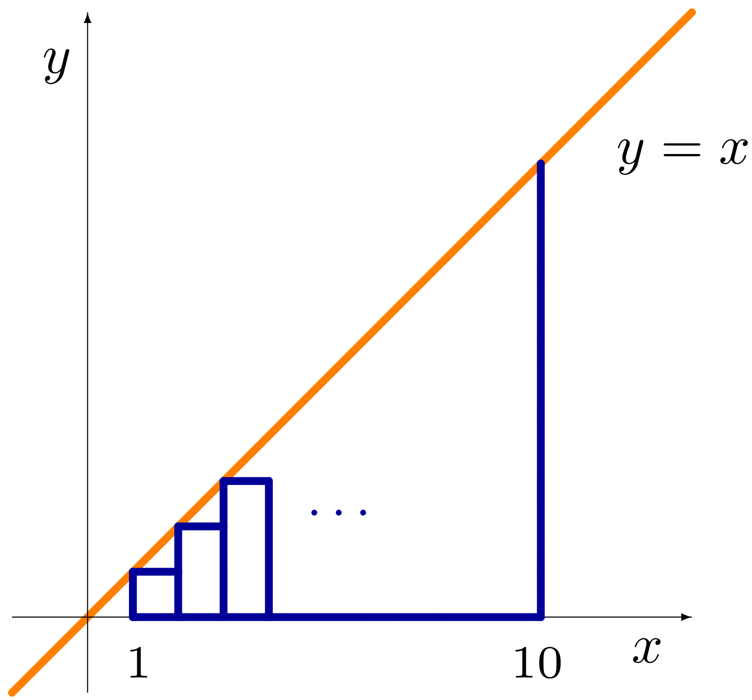
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



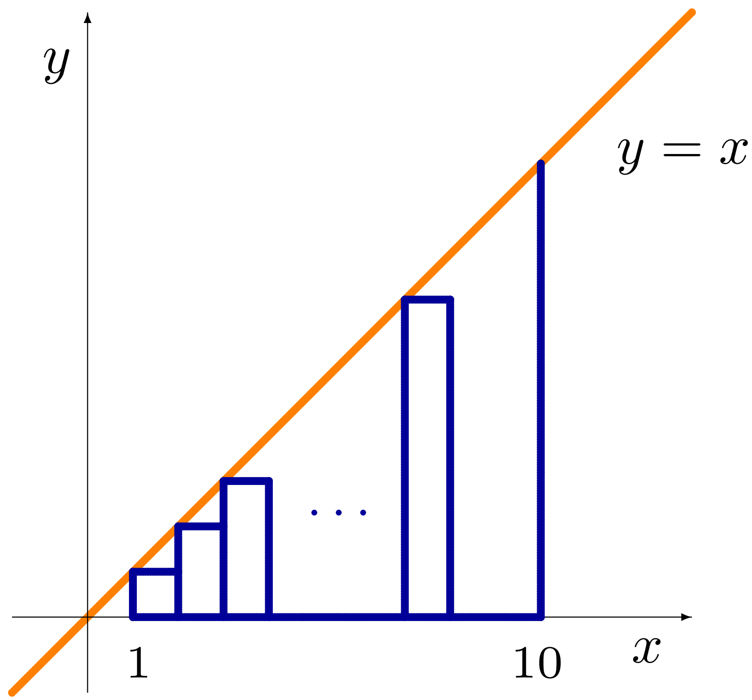
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



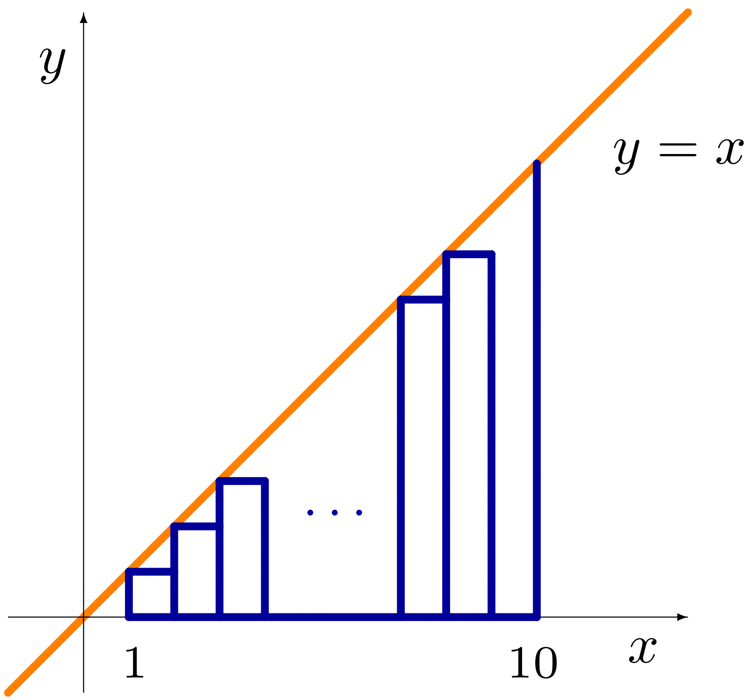
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



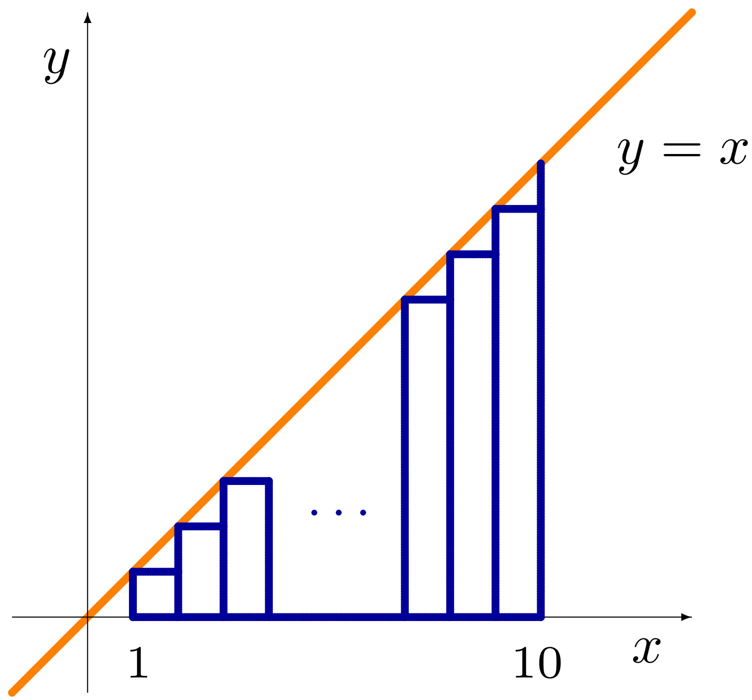
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés çi-dessous:



Alors

- la hauteur du rectangle dont la base est le segment x_0x_1 est $f(x_0)$, et son aire est $f(x_0)\Delta x$;
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment x_1x_2 est $f(x_1)$, et son aire est $f(x_1)\Delta x$;
- $\ldots$
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment $x_{n-2}x_{n-1}$ est $f(x_{n-2})$, et son aire est $f(x_{n-2})\Delta x$, et
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment $x_{n-1}x_n$ est $f(x_{n-1})$, et son aire est $f(x_{n-1})\Delta x$.

Puisque la fonction définissant la courbe est $f(x) = x$, la somme à gauche avec n subdivisions est

$$\begin{aligned}
\mathrm{SG}(n) &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-2})\Delta x + f(x_{n-1})\Delta x \\
&= x_0\Delta x + x_1\Delta x + \cdots + x_{n-2}\Delta x + x_{n-1}\Delta x \\
&= (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1})\Delta x \\
&= (x_0 + (x_0 + 1\cdot\Delta x) + \cdots + (x_0 + (n-2)\cdot\Delta x) \\
&\qquad\qquad + (x_0 + (n-1)\cdot\Delta x))\,\Delta x \\
&= nx_0\Delta x + (1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))\,(\Delta x)^2 \\
&= nx_0\Delta x + \frac{(n-1)n}{2}\,(\Delta x)^2 .
\end{aligned}$$

Mais $x_0 = 1$ et $\Delta x = \frac{9}{n}$, d'où

$$\mathrm{SG}(n) = n \cdot 1 \cdot \frac{9}{n} + \frac{81}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = 9 + \frac{81}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

L'aire sous la courbe est alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{SG}(n) = \lim_{n\to\infty} \left(9 + \frac{81}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 9 + \frac{81}{2}(1-0) = \frac{99}{2},$$

ce qui correspond exactement à la valeur obtenue en utilisant la formule pour l'aire d'un trapèze.

La méthode générale

La méthode utilisée pour calculer l'aire sous la courbe à l'exemple précédent est une méthode générale: elle ne dépend pas des propriétés de la courbe.

On obtient l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$ à l'aide de l'approximation par les sommes à gauche.

Nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en n segments de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Posons $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i = x_0 + i\Delta x$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Nous élevons ensuite des rectangles sur chacun des segments $x_{i-1}x_i$ de sorte à ce que la hauteur de chacun des rectangles prenne la valeur de la fonction évaluée au point du segment le plus à gauche, c'est-à-dire $f(x_{i-1})$.

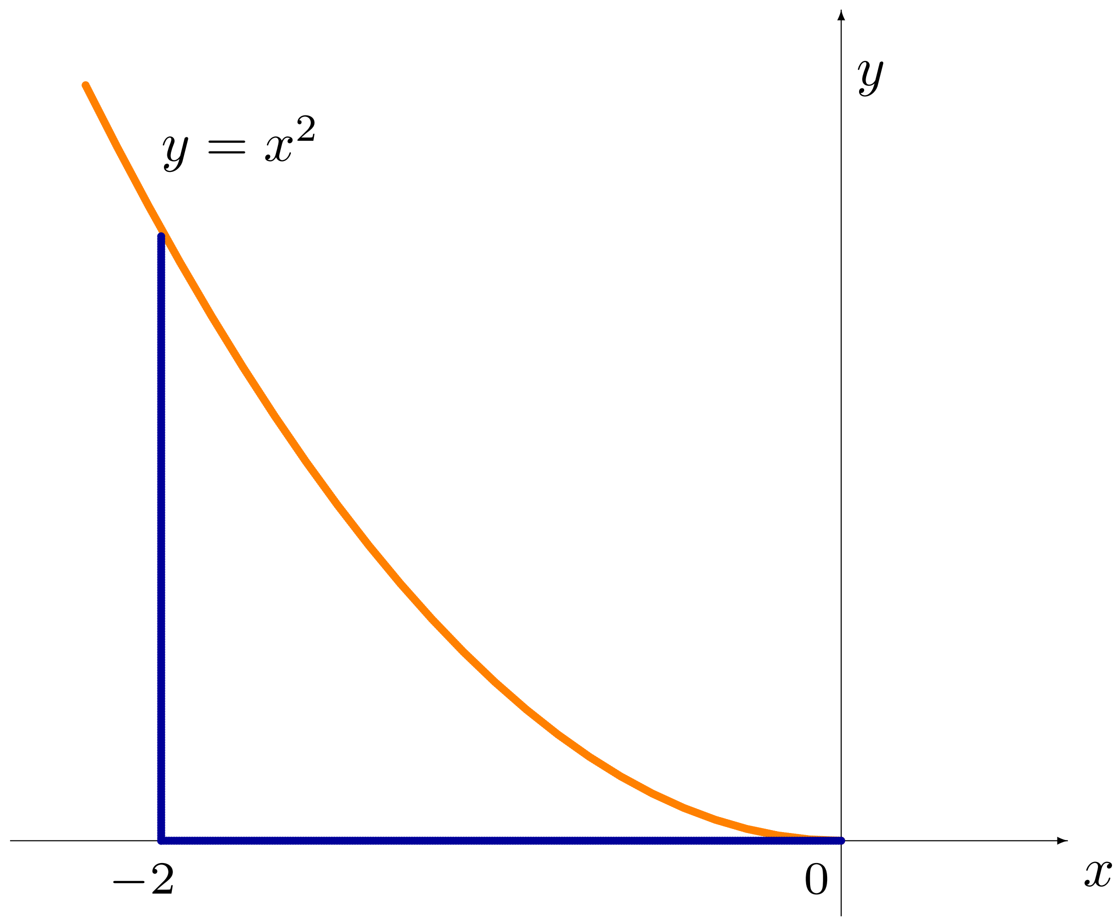
L'aire du rectangle sur ce segment est $f(x_{i-1})\Delta x$ et la somme à gauche avec n subdivisions est

$$\begin{aligned}\mathrm{SG}(n) &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-2})\Delta x + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_0 + i\Delta x)\Delta x\end{aligned}$$

L'aire sous la courbe entre a et b est obtenue en passant à la limite, lorsque n devient indéfiniment grand:

$$\text{aire sous la courbe} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{SG}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_0 + i\Delta x)\Delta x.$$

Exemple: calculer l'aire sous la courbe $y = x^2$ entre $x = -2$ et $x = 0$.


y
$y = x^2$
-2
0
x

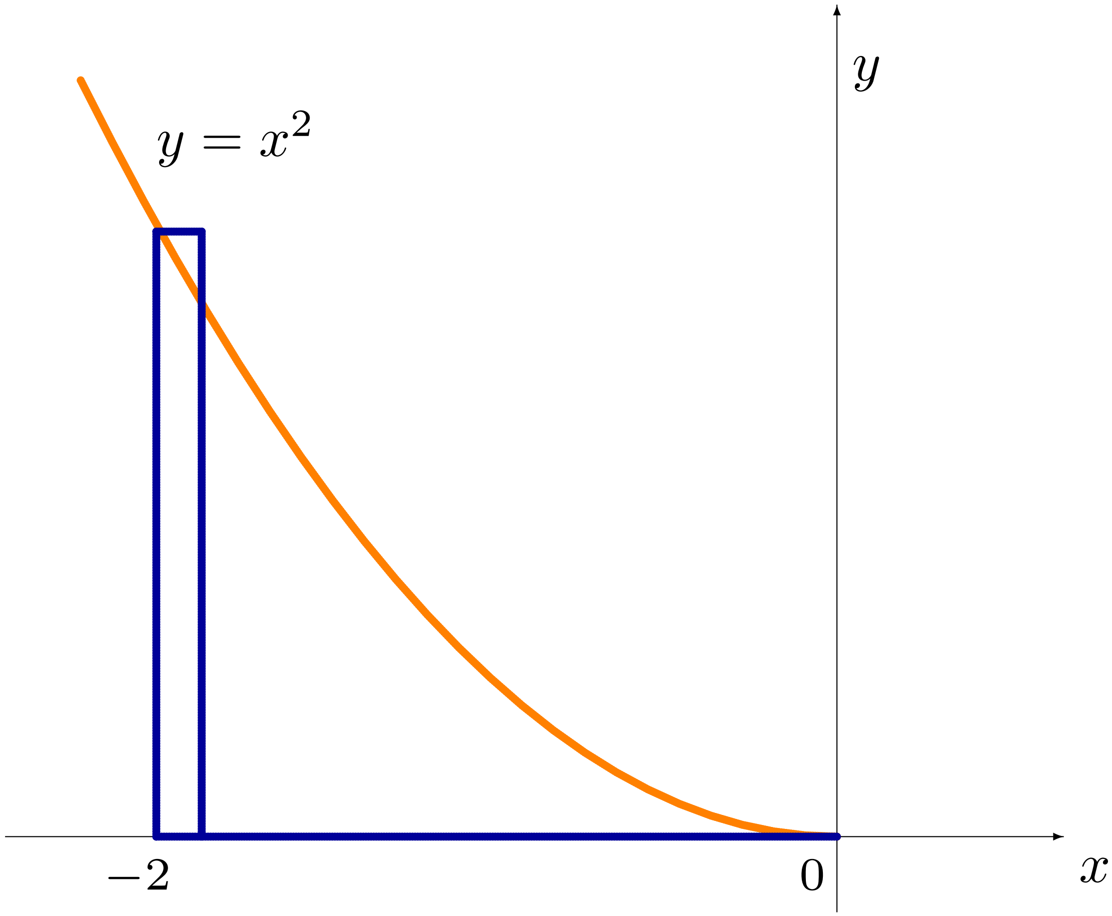
Solution: commençons par subdiviser l'intervalle $[-2, 0]$ en n segments égaux, tous de longueur

$$\Delta x = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}.$$

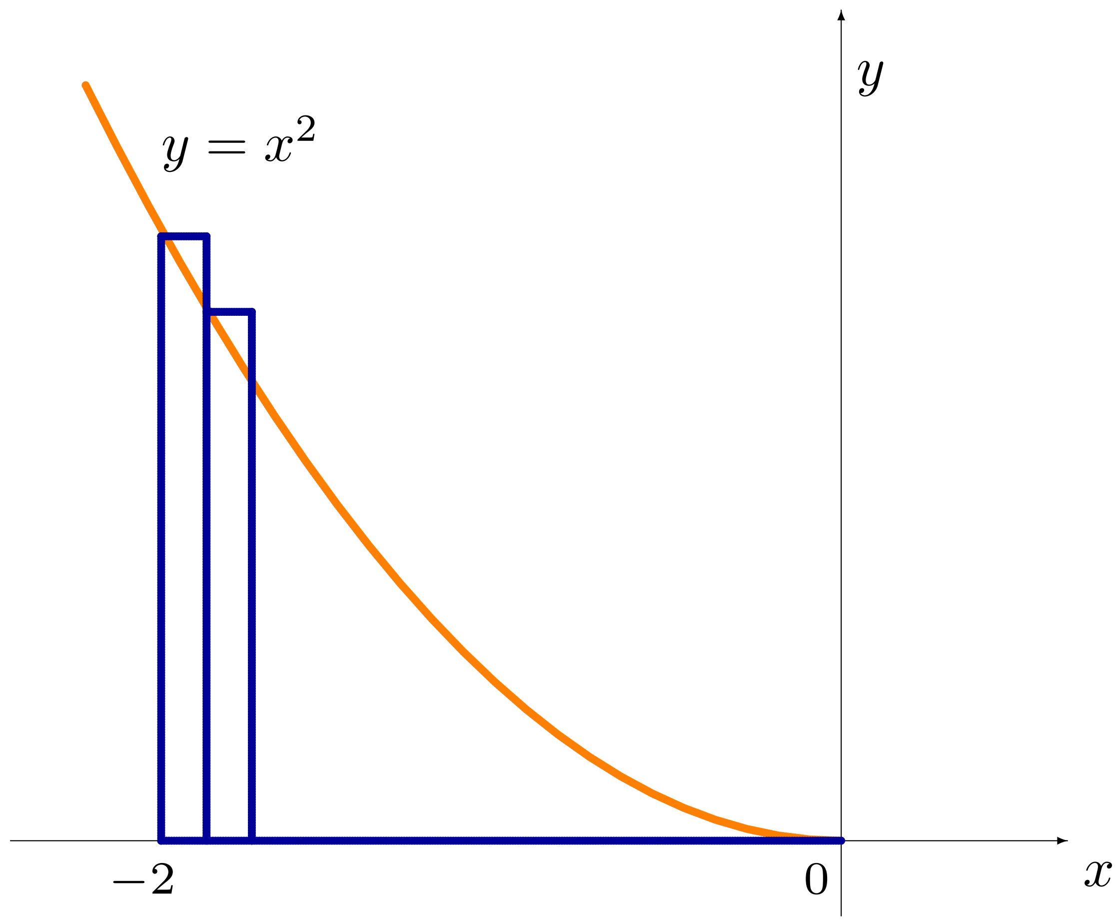
Soit $x_0 = -2$, $x_n = 0$; on définit $x_i = x_0 + i\Delta x$ pour $i = 1, \ldots, n-1$:

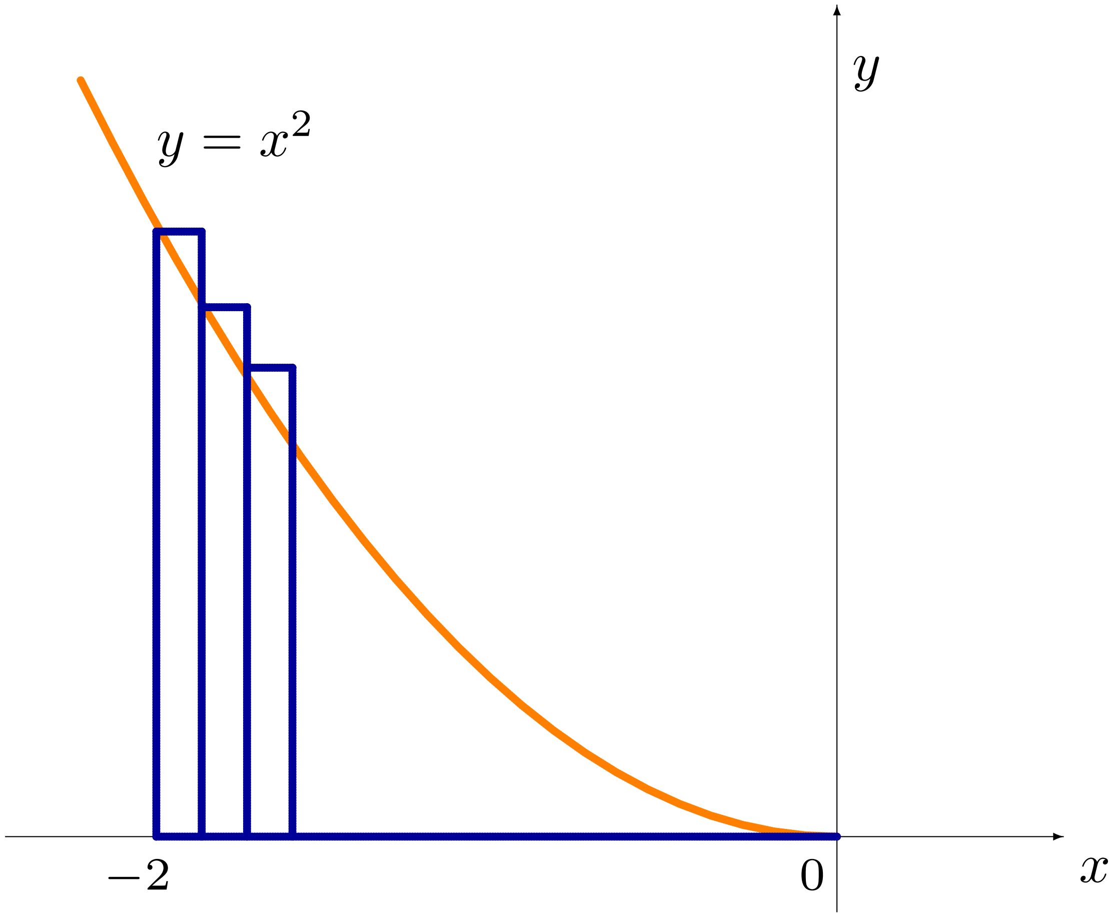
$$x_1 = -2 + \tfrac{2}{n}, \quad x_2 = -2 + 2 \cdot \tfrac{2}{n}, \quad \cdots,$$
$$x_{n-2} = -2 + (n-2)\tfrac{2}{n}, \quad x_{n-1} = -2 + (n-1)\tfrac{2}{n}.$$

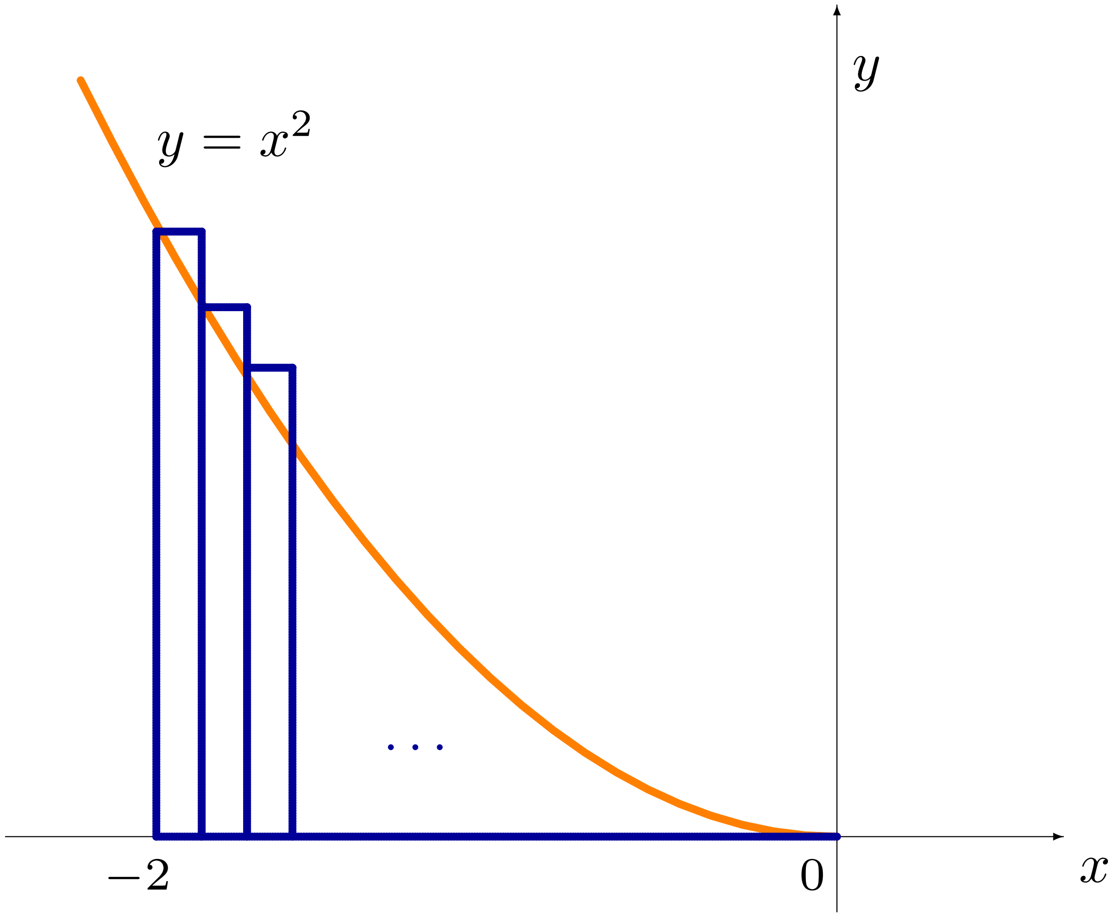
Les rectangles construits à l'aide de cette sous-division sont montrés à la prochaine page.

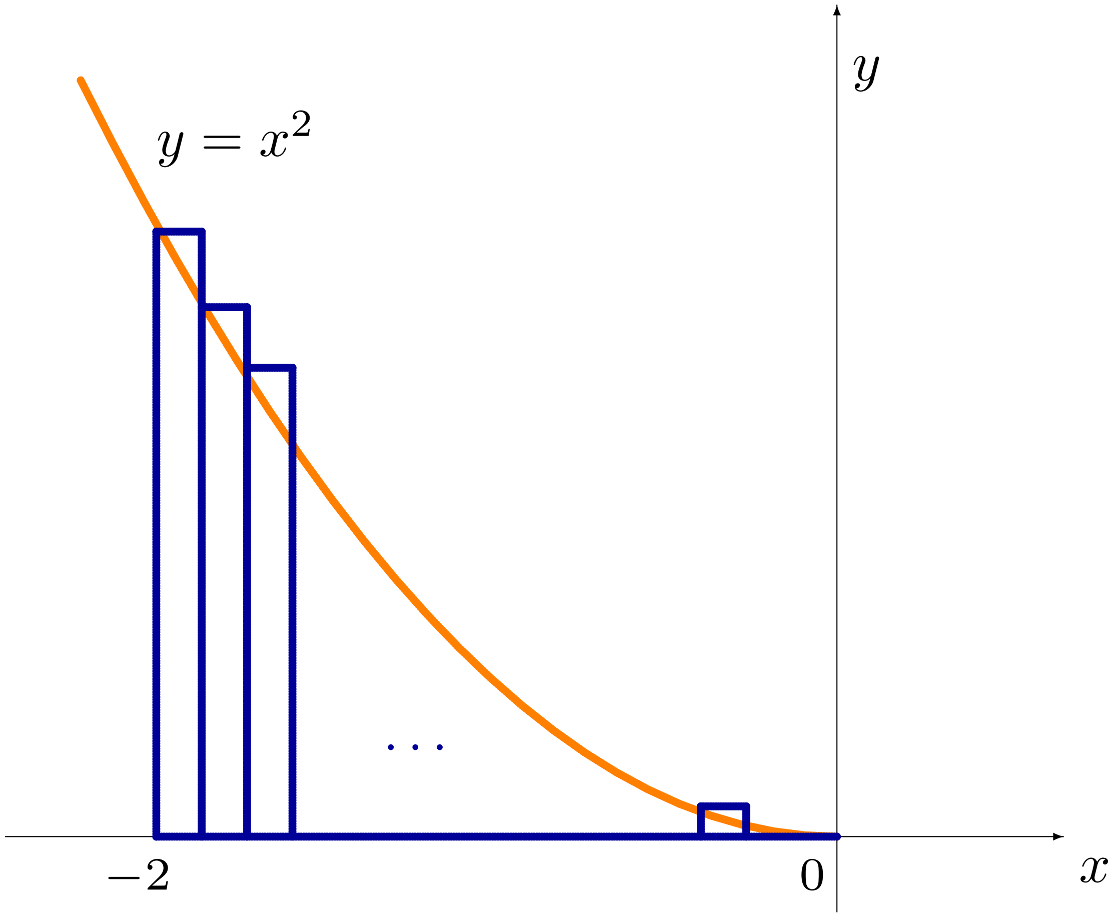


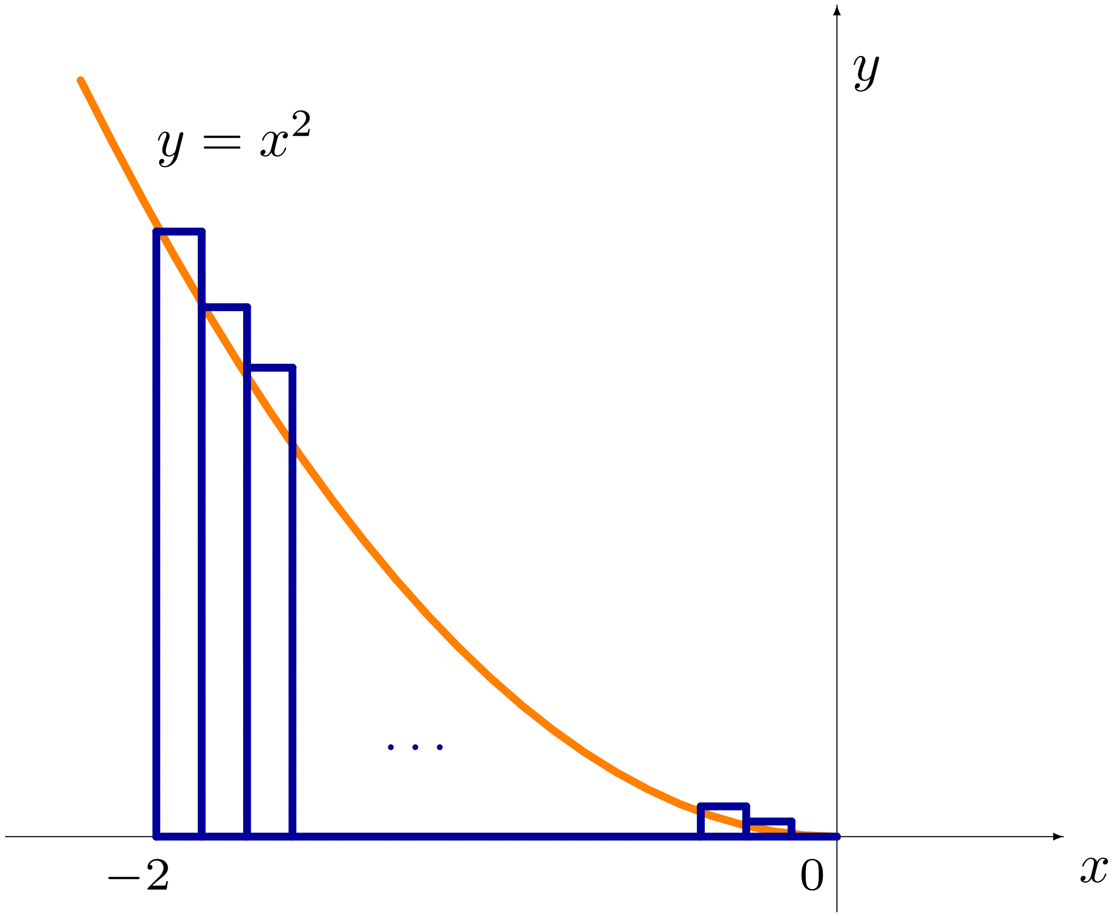
y
$y = x^2$
-2
0
x


$y = x^2$
y
x
-2
0


$y = x^2$
y
x
-2
0


$y = x^2$
y
x
-2
0
$\cdots$


y
$y = x^2$
$\cdots$
-2
0
x


$y = x^2$
y
x
-2
0
$\cdots$

Alors

- la hauteur du rectangle dont la base est le segment x_0x_1 est $f(x_0)$, et son aire est $f(x_0)\Delta x$;
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment x_1x_2 est $f(x_1)$, et son aire est $f(x_1)\Delta x$;
- $\ldots$
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment $x_{n-2}x_{n-1}$ est $f(x_{n-2})$, et son aire est $f(x_{n-2})\Delta x$, et
- la hauteur du rectangle dont la base est le segment $x_{n-1}x_n$ est $f(x_{n-1})$, et son aire est $f(x_{n-1})\Delta x$.

Puisque la fonction définissant la courbe est $f(x) = x^2$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SG}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_0 + i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}(x_0 + i\Delta x)^2 \Delta x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_0^2 + 2ix_0\Delta x + i^2 \left(\Delta x\right)^2\right) \Delta x \\
&= nx_0^2\Delta x + 2x_0 \left(\Delta x\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + \left(\Delta x\right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= nx_0^2\Delta x + 2x_0 \left(\Delta x\right)^2 \frac{(n-1)n}{2} + \left(\Delta x\right)^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.
\end{aligned}
$$

Mais $x_0 = -2$ et $\Delta x = \frac{2}{n}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{SG}(n) &= n(-2)^2 \cdot \tfrac{2}{n} + 2(-2)\left(\tfrac{2}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{(n-1)n}{2} + \left(\tfrac{2}{n}\right)^3 \cdot \tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= 8 - 8\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{4}{3}\left(2 - \tfrac{3}{n} + \tfrac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

L'aire sous la courbe est alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{SG}(n) &= \lim_{n\to\infty}\left(8 - 8\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 8 - 8(1-0) + \frac{4}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Cette approche existe aussi depuis ~ 250 ans, mais elle est (encore plus) encombrante que la méthode de calcul de la pente de la droite tangente.

On utilise plutôt des techniques de calcul de la primitive afin d'obtenir l'aire sous la courbe. Nous en reparlerons au chapitre 7.

⚠ **Une question devrait maintenant vous venir à l'esprit: comment sait-on vraiment que**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0?$$

Nous en reparlerons au chapitre 6.

Résumé

Pente de la sécante $\iff$ vitesse moyenne $\iff$ taux de variation moyen

Pente de la tangente $\iff$ vitesse $\iff$ taux de variation

La pente de la sécante donne une approximation de la pente de la tangente

La somme à gauche donne une approximation de l'aire sous la courbe

Le calcul de la pente tangente et le calcul de l'aire sous la courbe sont des opérations inverses; nous en reparlerons au chapitre 7.

La discipline se nomme **calcul différentiel** (pente) **et intégral** (aire)

Exercices suggérés