MAT 1700
Méthodes mathématiques I

Chapitre 3
Les concepts fondamentaux

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2021

Aperçu

3.1 – Les nombres réels et leurs propriétés

Les **nombres entiers naturels** sont les nombres qui nous viennent à l'esprit naturellement, ou encore, les "nombres pour compter:"

$$\mathbb{N}^{\times} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

On peut toujours les additionner et les multiplier (en demeurant dans $\mathbb{N}^{\times}$), mais ce n'est pas toujours le cas pour la soustraction et la division.

L'équation

$$x + 5 = 7$$

possède une solution unique dans $\mathbb{N}^{\times}$: $x = 2$. **Toute autre valeur de x transforme l'égalité en inégalité.**

Toute équation de la forme

$$x + a = b,$$

où $a < b \in \mathbb{N}^\times$ admet une unique solution $x = b - a$.

Que ce passe-t-il si $a = b$? L'équation $x + 9 = 9$, par exemple, n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^\times$: en substituant n'importe quel $x \in \mathbb{N}^\times$ dans l'équation, on détruit l'égalité.

Pourtant, il serait utile de toujours pouvoir résoudre l'équation $x + a = b$, où $a \leq b$. Il y a deux approches valides:

1. On ne peut pas le faire dans $\mathbb{N}^\times$? Tant pis: la vie est pleine de déceptions.

2. On ne peut pas le faire dans $\mathbb{N}^\times$? Rajoutons un nombre qui le permet!

Une scène de plage

Une scène de plage

Une scène de plage
avec 3 oiseaux

Une scène de plage avec 3 oiseaux

Une scène de plage avec 0 oiseaux

Une scène de plage
avec 0 oiseaux

Des deux approches, la seconde est plus intéressante. Elle représente un saut immense: l'**abstraction du néant**: $9 - 9 = 0$.

Le nouvel ensemble obtenu en ajoutant le 0 à $\mathbb{N}^{\times}$ est dénoté par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Toute équation de la forme

$$x + a = b, \quad \text{où } a \leq b \in \mathbb{N},$$

admet l'unique solution $x = b - a \in \mathbb{N}$.

Mais pourquoi s'arrêter là? Par exemple, l'équation $x + 7 = 5$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{N}$.

En suivant une approche semblable à celle qui nous a mené au 0, nous obtenons l'ensemble des **nombres entiers**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

On peut toujours les additionner, les soustraire, et les multiplier (en demeurant dans $\mathbb{Z}$), mais ce n'est pas toujours le cas pour la division.

De plus, toute équation de la forme

$$x + a = b, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{Z},$$

admet l'unique solution $x = b - a \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, puisque $-1 \notin \mathbb{N}$.

En suivant une approche semblable à celle qui nous a mené à $\mathbb{Z}$, nous obtenons l'ensemble des **nombres rationnels**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

On peut toujours les additionner, les soustraire, les multiplier, et les diviser (en demeurant dans $\mathbb{Q}$), mais ce n'est pas toujours le cas pour les racines.

De plus, toute équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{où } a \neq 0, b \in \mathbb{Z},$$

admet l'unique solution $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

Remarquons que $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, puisque $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Si les éléments de $\mathbb{Q}$ sont placés sur une droite, cette droite aura plusieurs trous: les **nombres irrationnels**, qui sont beaucoup plus nombreux que les nombres rationnels!?!)

En “remplissant” ces trous, on obtient l’ensemble des **nombres réels**

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{nombres irrationnels}\} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

On ne peut exprimer les nombres irrationnels en tant que rapport d’entiers.

Les nombres $\sqrt{2}$ et π, par exemple, sont des nombres irrationnels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes: soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors

A1. $x + y = y + x$;

A2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

A3. $x + 0 = x$;

A4. $x + (-x) = 0$ et $-x = (-1)x$;

A5. $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$;

D1. $x(y + z) = xy + xz$;

M1. $xy = yx$;

M2. $(xy)z = x(yz)$;

M3. $x \cdot 1 = x$ et $x \cdot 0 = 0$;

M4. si $x \neq 0$, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$;

M5. $x = y \Leftrightarrow xz = yz$ et $z \neq 0$;

N1. si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemples:

1. Pour quelle(s) valeur(s) x obtient-on $\frac{2}{3}(x-4)=5(6x+7)$?

Exemples:

1. Pour quelle(s) valeur(s) x obtient-on $\frac{2}{3}(x-4) = 5(6x+7)$?

   Solution: en utilisant les propriétés, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}(x-4) &= 5(6x+7) \\
2 \cdot \frac{1}{3}(x-4) &= 5(6x+7) \\
3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3}(x-4)\right) &= 3 \cdot (5(6x+7)) && \boxed{\textbf{M5}} \\
(3 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3}(x-4) &= (3 \cdot 5)\,(6x+7) && \boxed{\textbf{M2}}
\end{aligned}
$$

$$(2 \cdot 3) \cdot \frac{1}{3}(x - 4) = 15(6x + 7) \qquad \boxed{\textbf{M1}}$$

$$2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3}(x - 4)\right) = 15(6x + 7) \qquad \boxed{\textbf{M2}}$$

$$2 \cdot (1 \cdot (x - 4)) = 15(6x + 7) \qquad \boxed{\textbf{M4}}$$

$$2 \cdot (x - 4) = 15(6x + 7) \qquad \boxed{\textbf{M3}}$$

$$2 \cdot (x + (-4)) = 15(6x + 7) \qquad \boxed{\textbf{A4}}$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot (-4) = 15 \cdot 6x + 15 \cdot 7 \qquad \boxed{\textbf{D1}}$$

$$2x + (-8) = 90x + 105$$

$$2x + (-8) + 8 = 90x + 105 + 8 \qquad \boxed{\textbf{A5}}$$

$$2x + 0 = 90x + 113 \qquad \boxed{\textbf{A4}}$$

$$2x = 90x + 113 \qquad \boxed{\textbf{A3}}$$

$$2x + (-90)x = 90x + 113 + (-90)x \qquad \boxed{\textbf{A5}}$$

$$2x + (-90)x = 90x + (-90)x + 113 \qquad \boxed{\textbf{A2}}$$

$$(2 + (-90))x = (90 + (-90))x + 113 \qquad \boxed{\textbf{D1}}$$

$$(2 - 90)x = 0 \cdot x + 113 \qquad \boxed{\textbf{A4}}$$

$$(2-90)x = 0 + 113 \qquad \boxed{\textbf{M3}}$$

$$(2-90)x = 113 \qquad \boxed{\textbf{A3}}$$

$$(-88)x = 113$$

$$\frac{1}{(-88)}((-88)x) = \frac{1}{(-88)} \cdot 113 \qquad \boxed{\textbf{M4}}$$

$$\left(\frac{1}{(-88)}(-88)\right)x = -\frac{113}{88} \qquad \boxed{\textbf{M2}}$$

$$1 \cdot x = -\frac{113}{88} \qquad \boxed{\textbf{M4}}$$

$$x = -\frac{113}{88} \qquad \boxed{\textbf{M3}}$$

On peut vérifier si la réponse est valide en la substituant dans l'équation originale et en confirmant que l'égalité est préservée.

M.G.: $\frac{2}{3}(x-4) = \frac{2}{3}\left(-\frac{113}{88} - 4\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{465}{88}\right) = -\frac{155}{44}$;

M.D.: $$5(6x+7) = 5\left(6\left(-\frac{113}{88}\right) + 7\right) = 5\left(-\frac{339}{44} + 7\right) = 5\left(-\frac{31}{44}\right) = -\frac{155}{44}.$$

Puisque **M.G.**=**M.D.**, c'est la bonne réponse.

⚠ **Dans cet exemple, il n'y avait qu'une réponse possible. S'il y a plus d'une réponse, la substitution vous permet simplement de déterminer si votre réponse est valide.**

En pratique, il n'est pas nécéssaire de résoudre avec une telle minutie:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}(x-4) &= 5(6x+7) \\
2(x-4) &= 15(6x+7) \\
2x-8 &= 90x+105 \\
-88x &= 113 \\
x &= -\frac{113}{88}.
\end{aligned}$$

2. Marie dispose de $300\$$ pour acheter un amplificateur. En sachant que les diverses taxes qui s'appliquent à l'achat de ce produit s'élèvent à 15%, peut-elle se permettre un $\textit{Marshall Valvestate 80V}$ dont le prix brut est $259.99\$$?

Solution: à l'achat, les taxes prennent la valeur

$$0.15(259.99\$) \approx 39.00\$.$$

Puisque l'amplificateur coûte $259.99\$$, le coût total de l'achat est approximativement

$$259.99\$ + 39.00\$ = 298.99\$.$$

Elle peut donc se procurer l'amplificateur.

Il y a une autre façon d'aborder le problème.

Soit x la valeur maximale (en dollars) de l'amplificateur qu'elle puisse se permettre. Les taxes qui s'appliquent prennent alors la valeur $0.15x$.

Puisqu'elle dispose de $300\$$ dollars, nous obtenons

$$\begin{aligned} x + 0.15x &= 300 \\ (1 + 0.15)x &= 300 \\ 1.15x &= 300 \\ x &= \frac{300}{1.15} \approx 260.87. \end{aligned}$$

Ainsi, tant que le prix brut de l'amplificateur est inférieur à $260.87\$$, elle pourra se le procurer.

3. Trouver y tel que $\frac{1}{3}(y + 1) = \frac{1}{3}(y + 2)$.

Solution: en utilisant les propriétés, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(y+1) &= \frac{1}{3}(y+2) \\
y+1 &= y+2 \\
y-y &= 2-1 \\
0 &= 1,
\end{aligned}$$

ce qui est évidemment impossible. Aucune valeur de y ne satisfait à l'équation.

4. Pour quelle(s) valeur(s) ξ obtient-on $\xi(\xi+2)=0$? (**IMPORTANT!**)

Solution: on se sert de la propriété **N1**. Si $\xi(\xi+2)=0$, alors

$$\underbrace{\xi}_{=0}\underbrace{(\xi+2)}_{=0}=0,$$

d'où $\xi=0$ ou $\xi+2=0$. Alors $\xi=0$ ou $\xi=-2$.

5. Pour quelle(s) valeur(s) $\gimel$ obtient-on $\gimel-1=(\gimel-3)+2$?

Solution: Nous obtenons

$$\begin{aligned}\gimel-1 &= (\gimel-3)+2\\ \gimel-1 &= \gimel-1\\ \gimel &= \gimel \implies \text{tout } \gimel\in\mathbb{R} \text{ satisfait à l'équation.}\end{aligned}$$

Par **équation**, on entend une expression contenant des variables et un "$=$"; **résoudre l'équation** correspond à trouver les valeurs qui rendent l'équation valide. Par exemple, $x + 2 = 3$ est une équation dont la solution est $x = 1$.

⚠ **L'expression $f(x) = x+2$ n'est pas une équation: c'est la définition de la fonction f.**

On peut résoudre une équation et obtenir:

- **aucune** solution,
- une solution **unique**,
- une **multitude finie** de solutions, ou encore
- une **infinité** de solutions.

Il est aussi important de savoir manipuler les fractions correctement.

Voici 6 propriétés importantes de ces dernières: soient x, y, z, w des nombres réels tels que $z, w \neq 0$. Alors

F1. $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{x+y}{z}$;

F2. $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{w} = \dfrac{xw+yz}{zw}$;

F3. $\dfrac{x}{z} - \dfrac{y}{w} = \dfrac{xw-yz}{zw}$;

F4. $\dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{y}{w} = \dfrac{xy}{zw}$;

F5. $\dfrac{x}{z} \div \dfrac{y}{w} = \dfrac{xw}{zy}$;

F6. $\dfrac{zx}{zw} = \dfrac{x}{w}$.

Exemples: simplifier les expressions suivantes.

1. $\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{7} =$

2. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+2} =$

3. $\dfrac{(3-h)^2 - 3^2}{h} =$

Exemples (et solutions): simplifier les expressions suivantes.

1. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{(3)(7)+(2)(4)}{(4)(7)}=\dfrac{29}{28}$;

2. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+1(x)}{x(x+2)}=\dfrac{3x+4}{x(x+2)}$, si $x\neq 0,-2$;

3. $\dfrac{(3-h)^2-3^2}{h}=\dfrac{9-6h+h^2-9}{h}=\dfrac{-6h+h^2}{h}=\dfrac{h(-6+h)}{h}=-6+h$, tant que $h\neq 0$;

4. Le **coefficient de liquidité** est le rapport des valeurs disponible aux dettes à court terme. Supposons qu'une libraire dispose de $100,000$\$ en liquide et qu'elle doit $250,000$\$ à divers créanciers. Supposons de plus qu'elle désire emprunter une somme supplémentaire, tout en conservant un coefficient de liquidité égal à $\frac{1}{2}$. Quel montant doit-elle emprunter?

   Solution: soit x le montant que la libraire emprunte. Elle dispose donc de $100000 + x$ en liquide, mais ses dettes s'élevent à $250000 + x$. Le coefficient de liquidité doit s'exprimer comme suit:

$$\frac{100000 + x}{250000 + x} = \frac{1}{2}.$$

   On trouve x en multipliant à gauche et à droite par $2(250000 + x)$.

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
2(250000+x)\left(\frac{100000+x}{250000+x}\right) &= \frac{1}{2}\cdot 2(250000+x)\\
2(100000+x) &= 250000+x\\
200000+2x &= 250000+x\\
x &= 50000.
\end{aligned}$$

Elle devra donc emprunter $50,000$\$ afin de maintenir un coefficient de liquidité de $\frac{1}{2}$.

⚠ **Ce sont des manipulations que vous devez maîtriser avant de vous lancer dans le calcul différentiel et intégral.**

Les puissances et les racines

Dans $\mathbb{R}$, les opérations principales sont $+$ et $\times$; $-$ et $\div$ ne sont pas vraiment de nouvelles opérations:

$$a - b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b + c$$
$$a \div b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \times c.$$

Le calcul d'une **puissance** et l'extraction d'une **racine** sont des opérations réciproques (comme $+$ et $-$, ou $\times$ et $\div$):

$$a^n = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt[n]{c}.$$

Soit x un nombre réel. La $n-$**ième puissance de** x est définie par

$$x^1 = x, \quad x^2 = xx, \quad \cdots, \quad x^n = \underbrace{xx\cdots x}_{n \text{ fois}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$.

Si $x \neq 0$, alors $x^0 = 1$ et

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \quad \cdots, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$.

⚠ 0^0 **n'est pas défini; c'est une forme indéterminée.**

Exemples:

1. $7^2 =$

2. $(-4)^3 =$

3. $3^{-2} =$

4. $7772827^0 =$

5. $(0.15)^3 =$

6. $(1.1)^{-3} =$

Exemples (et solutions):

1. $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$;

2. $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$;

3. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

4. $7772827^0 = 1$;

5. $(0.15)^3 = (0.15)(0.15)(0.15) = 0.003375$;

6. $(1.1)^{-3} = \frac{1}{(1.1)^3} \approx 0.751$.

7. Supposons qu'une somme d'argent A soit placée à un taux d'intérêt i (composé annuellement). Quel est le solde S_n après n années?

Solution: en général, le solde S_n après n années sera

$$\begin{aligned} S_n &= \text{solde à la fin de l'année } n-1 + \text{intérêt accumulé durant l'année } n \\ &= S_{n-1} + iS_{n-1} \\ &= (1+i)S_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, le solde S_n après n années dépend du solde S_{n-1} après $n-1$ années, qui dépend lui-même du solde S_{n-2}, et ainsi de suite.

Remarquons qu'au bout d'un an, le solde S_1 sera

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{somme placée} + \text{intérêt accumulé durant l'année} \\ &= A + iA \\ &= (1+i)A. \end{aligned}$$

De même, le solde S_2 sera

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{solde à la fin de la première année } + \text{intérêt accumulé durant l'année} \\ &= S_1 + iS_1 \\ &= (1+i)S_1 \\ &= (1+i)(1+i)A = (1+i)^2 A, \end{aligned}$$

et après trois ans,

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{solde à la fin de la seconde année } + \text{intérêt accumulé durant l'année} \\ &= S_2 + iS_2 \\ &= (1+i)S_2 \\ &= (1+i)(1+i)^2 A = (1+i)^3 A. \end{aligned}$$

En général, le solde S_n après n années sera

$$S_n = (1+i)^n A.$$

Par exemple, si le placement initial est $A = 2000$ et que le taux d'intérêt (composé annuellement) est $i = 8\% = 0.08$ alors le solde après 7 ans est $S_7 = 2000(1+0.08)^7 = 2000(1.08)^7 \approx 3427.65$ \$.

Les puissances possèdent 5 propriétés importantes: soient $x, y \neq 0$ des nombres réels et m, n des entiers. Alors

P1. $x^m x^n = x^{m+n}$;

P2. $(xy)^m = x^m y^m$;

P3. $(x^m)^n = x^{mn}$;

P4. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$;

P5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel. La $n-$**ième racine (réelle) de** x est un nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$y^n = x.$$

Par exemple, les racines carrées de 4 sont -2 et 2 puisque $(-2)^2 = 4$ et $(2)^2 = 4$; la racine cubique de -27 est -3 puisque $(-3)^3 = -27$.

En général, si $x > 0$ et n est pair, x possède deux $n-$ième racines (dénotons les par y et $-y$), puisque

$$y^n = (-y)^n = x.$$

Si $x < 0$ et n est pair, x ne possède aucune $n-$ième racine.

De plus, lorsque n est impair, x possède exactement une $n-$ième racine, quelque soit le signe de x.

Ainsi, pour tout $x > 0$, nous écrirons (afin de souligner le lien avec les puissances):

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} = \begin{cases} n-\text{ième racine positive} & \text{lorsque } n \text{ est pair,} \\ n-\text{ième racine} & \text{lorsque } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemples:

1. $2^6 2^{-3} =$

2. $\dfrac{4^{1/2}4^{3/2}}{2} =$

3. $y^{7/3}y^{1/3}x =$

4. $\left(\dfrac{-8}{125}\right)^{-4/3} =$

Exemples (et solutions):

1. $2^6 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^3 = 8$;

2. $\dfrac{4^{1/2}4^{3/2}}{2} = \dfrac{4^{1/2+3/2}}{2} = \dfrac{4^2}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$;

3. $y^{7/3}y^{1/3}x = y^{7/3+1/3}x = y^{8/3}x$;

4. $$\left(\frac{-8}{125}\right)^{-4/3} = \left(\left(\frac{-8}{125}\right)^{-1/3}\right)^4 = \left(\left(\frac{125}{-8}\right)^{1/3}\right)^4 = \left(\frac{125^{1/3}}{(-8)^{1/3}}\right)^4$$
$$= \left(\frac{5}{-2}\right)^4 = \frac{625}{16};$$

5. Un charpentier dispose de l'équivalent de 27 m^2 de peinture. Quelles sont les dimensions de la plus grosse boîte cubique qu'il peut couvrir avec toute sa peinture?

Solution: soit x la longueur de l'arrête de la boîte. Chaque face du cube a une superficie de x^2; la surface que le charcutier doit peindre est $6x^2$ m^2. On doit résoudre $6x^2 = 27$, d'où

$$x^2 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \implies x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

On rejette la solution négative; ainsi, l'arrête de la plus grande boîte qu'il peut couvrir avec 27 m^2 de peinture est $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m... c'est une très grosse boîte.

Les inégalités et les valeurs absolues

Il est souvent important de déterminer laquelle de plusieurs quantité est la plus grande ou la plus petite.

Si x et y sont des réels tels que x **est strictement plus petit que** y, nous écrivons $x < y$. Si x **est plus petit ou égal à** y, nous écrivons $x \leq y$.

Graphiquement, cela revient à dire que

- x se retrouve strictement à gauche de y sur la droite réelle dans le premier cas, et

- x se retrouve à gauche de y sur la droite réelle ou que $x = y$ dans le second.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors

I1. si $x < y$, alors $x + z < y + z$;

I2. si $x + z < y + z$, alors $x < y$;

I3. si $z > 0$, alors $x < y$ si et seulement si $xz < yz$;

I4. si $z < 0$, alors $x < y$ si et seulement si $xz > yz$.

Les propriétés **I3.** et **I4.** reviennent à dire que la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif renverse toujours le sens de l'inégalité.

Exemples:

1. Puisque $2 < 7$, alors $2 + x < 7 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Supposons que $4 < -3x < 9$. Alors

$$\frac{4}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{9}{-3} \implies -3 < x < -\frac{4}{3}.$$

3. Trouver les valeurs w telles que $w(w+2) \geq 0$. (**IMPORTANT!**)

   Solution: $xy \geq 0 \implies x \geq 0$ et $y \geq 0$ ou $x \leq 0$ et $y \leq 0$.

   Ainsi, $w \geq 0$ et $w + 2 \geq 0 \implies w \geq 0$ et $w \geq -2 \implies w \geq 0$, ou $w \leq 0$ et $w + 2 \leq 0 \implies w \leq 0$ et $w \leq -2 \implies w \leq -2$.

   En conclusion, $w(w+2) \geq 0$ lorsque $w \geq 0$ ou $w \leq -2$.

4. Un père sait qu'il a besoin d'au moins 10 couches par jour et d'au plus 15 couches par jour pour subvenir aux besoins de ses jumeaux. Si le prix du commerçant pour un paquet de 40 couches est de 11.49\$, quelle somme s'attend-t-il à verser par tranche de 2 semaines?

   Solution: soient x le nombre total de couches utilisées pendant 2 semaines et y le valeur réelle d'une couche. La somme qu'il a à débourser est alors xy. Mais

$$140 = 14(10) \leq x \leq 14(15) = 210,$$

   c'est-à-dire qu'il utilise entre 140 et 210 couches par tranche de 2 semaines. Puisque le prix d'une couche est positif,

$$140y \leq xy \leq 210y.$$

En supposant que les diverses taxes s'appliquant à cet achat totalisent 15% du prix du commerçant, un paquet de 40 couches vaut réellement

$$11.49 + 0.15(11.49) = 1.15(11.49) \approx 13.21\$.$$

Ainsi $40y = 13.21\$$, d'où $y \approx 0.33\$$. Nous obtenons alors

$$46.20 = 140(0.33) \leq xy \leq 210(0.33) = 69.30,$$

c'est-à-dire que le pauvre père déboursera entre $46.20\$$ et $69.30\$$ par tranche de 2 semaines.

Note: durant une année complète, un nouveau-né utilise environ 3000 couches... ça commence à faire beaucoup de déchets. Le père devrait peut-être considérer utiliser des couches en coton.

Soient $x < y$ deux nombres réels. Les **intervalles formés à partir de x et y** sont définis par

1. $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\}$;

2. $]x, y[= \{z : x < z < y\}$;

3. $[x, y[= \{z : x \leq z < y\}$;

4. $]x, y] = \{z : x < z \leq y\}$.

Le premier intervalle est un intervalle **fermé**, le quatrième est **ouvert**, et les second et troisièmes sont **demi-ouverts ou demi-fermés**.

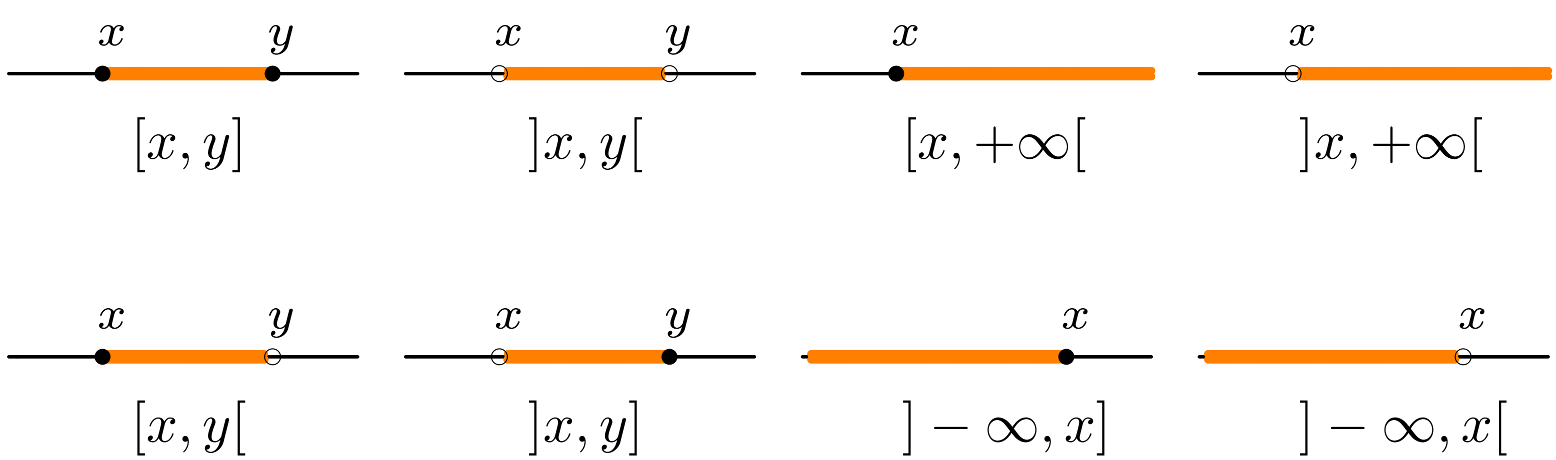
Les **intervalles non-bornés formés à partir de** x sont définis par

5. $[x, +\infty[= \{z : x \leq z\}$;

6. $]x, +\infty[= \{z : x < z\}$;

7. $]-\infty, x] = \{z : z \leq x\}$;

8. $]-\infty, x[= \{z : z < x\}$.



Exemples:

1. À l'exemple précédent, la somme déboursée par le père pour 2 semaines de couches se retrouve dans l'intervalle fermé $[46.20, 69.30]$.

2. Trouver l'intervalle des valeurs z pour lesquelles $12z - 3 > 5$.

Solution: par définition,

$$12z - 3 > 5$$
$$12z > 5 + 3 = 8$$
$$z > \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi l'intervalle recherché est $]\frac{2}{3}, \infty[$.

3. Trouver l'intervalle des valeurs β pour lesquelles $0 \leq 1 - 2\beta < 3$.

Solution: Par définition,

$$0 \leq 1 - 2\beta < 3 \iff 0 - 1 \leq 1 - 2\beta - 1 < 3 - 1 \iff -1 \leq -2\beta < 2$$
$$\iff \frac{-1}{-2} \geq \frac{-2\beta}{-2} > \frac{2}{-2} \iff \frac{1}{2} \geq \beta > -1 \iff]-1, 1/2].$$

L'intervalle des valeurs qui satisfont à une inéquation est l'**intervalle solution** de l'inéquation.

La **valeur absolue** d'un nombre réel mesure sa distance de l'origine:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

VA1. $|x| = \sqrt{x^2}$;

VA2. $-|x| \leq x \leq |x|$;

VA3. $|xy| = |x| \cdot |y|$;

VA4. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

VA5. $|x - y| \leq |x| + |y|$;

VA6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exemples:

1. Trouver tous les nombres x qui satisfont à $|x| = 2$.

   Solution: puisque $|x| = \sqrt{x^2}$, les nombres recherchés satisfont à $\sqrt{x^2} = 2$. Ainsi $x^2 = 4$, d'où $x = 2$ ou $x = -2$.

2. Trouver tous les nombres x qui satisfont à $|x - a| = r$, où $r \geq 0$.

   Solution: ces nombres satisfont à $\sqrt{(x-a)^2} = r$, d'où $(x-a)^2 = r^2$. Ainsi, $x - a = r$ ou $x - a = -r$, d'où $x = a + r$ ou $x = a - r$.

   Par exemple, les solutions de $|x - 1| = 3$ sont $x = 1 + 3 = 4$ ou $x = 1 - 3 = -2$.

3. Trouver tous les nombres y qui satisfont à $|y+1| = -2$.

   Solution: par définition, la valeur absolue de tout nombre doit être plus grande ou égale à 0, ce qui n'est pas le cas ici. Il n'y a donc aucun nombre y qui satisfait à l'équation.

4. Trouver tous les nombres z qui satisfont à $|z+5| \leq 21$.

   Solution: les nombres recherchés se retrouvent à une distance d'au plus 21 de -5. Ainsi, ce sont tous les nombres z tels que

$$-21 \leq z+5 \leq 21 \implies -26 \leq z \leq 16.$$

   L'intervalle solution est alors $[-26, 16]$.

5. Trouver tous les nombres z qui satisfont à $|z+5| \geq 21$.

   Solution: les nombres recherchés se retrouvent à une distance d'au moins 21 de -5.

   Ainsi, ce sont tous les nombres z tels que $z+5 \geq 21$ ou $-21 \geq z+5$, d'où $z \geq 16$ ou $z \leq -26$.

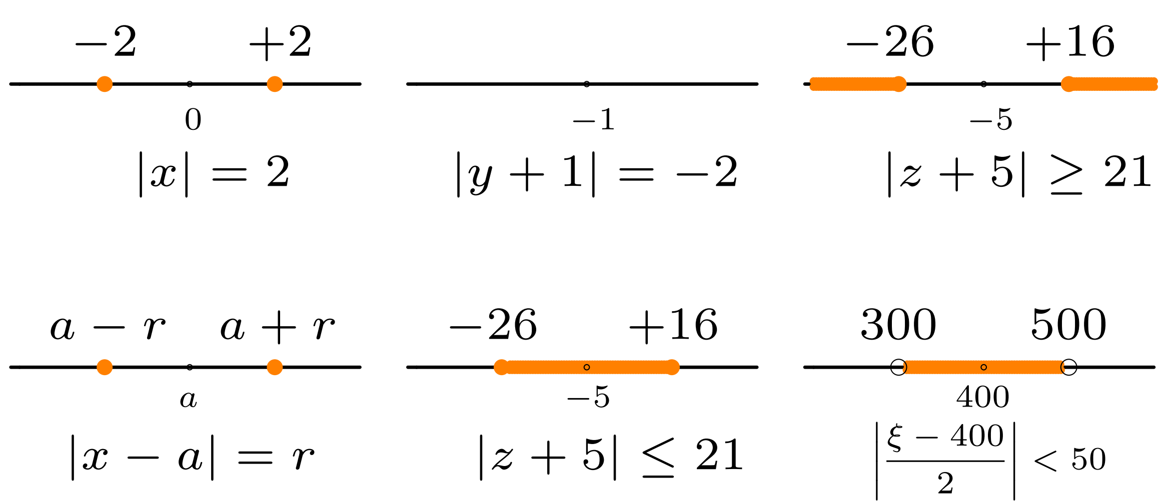
   L'intervalle solution est alors $]-\infty, -26] \cup [16, \infty[$.

6. Trouver tous les nombres ξ qui satisfont à $\left|\dfrac{\xi - 400}{2}\right| < 50$.

Solution: par définition, nous avons

$$\left|\frac{\xi - 400}{2}\right| < 50 \iff |\xi - 400| < 2(50) = 100$$

$$-100 < \xi - 400 < 100 \iff 300 < \xi < 500 \iff]300, 500[.$$



3.2 – Les polynômes et la factorisation

Dans les applications, on doit souvent résoudre des équations de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

où l'inconnue est x et où les $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Le membre gauche de l'équation est un **polynôme de degré n en x.**

Degré 0: le polynôme $p(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$ est **constant**. Dans ce cas, l'équation polynomiale

$$p(x) = a_0 = 0$$

ne possède pas de solution puisque $a_0 \neq 0$, par définition.

Degré 1**:** le polynôme $p(x) = a_1x + a_0$, $a_1 \neq 0$, est **linéaire**. L'équation

$$p(x) = a_1x + a_0 = 0$$

admet une unique solution: $x = -\frac{a_0}{a_1}$.

Degré 2**:** le polynôme $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, est **quadratique**. Léquation

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

admet les solutions suivantes:

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad \text{et} \quad x = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Si le **discriminant** $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$, l'équation possède deux solutions dans $\mathbb{R}$, si $\Delta = 0$, elle n'en possède qu'une seule, et si $\Delta < 0$, elle ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Degré ≥ 3: il est en général beaucoup plus difficile de résoudre les équations polynomiales de degré supérieur à 3; il existe quand même des formules "cubiques" et "quartiques" analogues à la formule quadratique.

En général, pour résoudre l'équation $p(x) = 0$, où $p(x)$ est un polynôme de degré n, on utilise soit des méthodes numériques (en dehors du cadre de ce cours) ou on **factorise** $p(x)$:

$$p(x) = (c_1x + d_1)(c_2x + d_2)\cdots(c_nx + d_n),$$

où les $c_i \neq 0, d_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Selon la propriété **N1**, les solutions de $p(x) = 0$ sont les n solutions (qui peuvent se répéter ou être complexes) des équations linéaires

$$\begin{aligned} c_1x + d_1 &= 0 \\ c_2x + d_2 &= 0 \\ &\vdots \\ c_nx + d_n &= 0. \end{aligned}$$

⚠ Il est parfois impossible de factoriser en facteurs linéaires, et nous devons nous contenter d'une factorisation en facteurs linéaires et/ou quadratiques.

Un facteur quadratique qui ne peut être factorisé en facteurs linéaires est **irréductible**; ses racines sont des nombres complexes.

Un polynôme quadratique dont le discriminant est négatif est irréductible.

Exemples:

1. Factoriser $x^2 + 3x + 2$.

   Solution: ré-écrivons

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x^2 + x + 2x + 2 \\ &= x(x+1) + 2(x+1) \\ &= (x+2)(x+1). \end{aligned}$$

   Le membre de droite est la factorisation recherchée.

2. Factoriser $x^3 + x^2 + x + 1$.

Solution: ré-écrivons

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 1 &= x^3 + x + x^2 + 1 \\ &= x(x^2+1) + 1(x^2+1) \\ &= (x^2+1)(x+1). \end{aligned}$$

Le terme $x^2 + 1$ ne peut se factoriser, comme nous le verrons plus tard.

3. Trouver les racines réelles de l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.

   Solution: la factorisation de ce polynôme est connue (exemple 1), alors

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) = 0.$$

Selon la propriété **N1**, nous avons $x + 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$, d'où $x = -2$ et $x = -1$ sont les racines réelles de l'équation.

4. Trouver les racines réelles de l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

   Solution: la factorisation de ce polynôme est connue (exemple 2), alors
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) = 0.$$
   Selon **N1**, nous avons $x^2 + 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$. Mais il est impossible d'obtenir $x^2 + 1 = 0$ puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient $x + 1 = 0$ lorsque $x = -1$; c'est la seule racine réelle de l'équation.

Il existe plusieurs méthodes de factorisation. En voici quelques unes des plus communes.

La différence de carrés et les carrés parfaits

La méthode de la **différence de carrés** ne s'applique qu'à certains polynômes de degré pair. Soit a un nombre réel. Alors

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.
   (a) $x^2 - 1$;
   (b) $y^2 - 9$;
   (c) $x^2 + 1$;
   (d) $x^4 - 1$.

Solution:

(a) Posons $a = 1$. Alors $a^2 = 1$ et

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

(b) Posons $a = 3$. Alors $a^2 = 9$ et

$$y^2 - 9 = (y-3)(y+3).$$

(c) Ce n'est pas une différence de carrés.

(d) Posons $y = x^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2)^2 - 1 = y^2 - 1 = (y-1)(y+1) \\ &= (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1). \end{aligned}$$

2. Résoudre les équations suivantes.

(a) $x^2 - 1 = 0$;

(b) $y^2 - 9 = 0$;

(c) $x^2 + 1 = 0$;

(d) $x^4 - 1 = 0$.

2. Résoudre les équations suivantes.

(a) $x^2 - 1 = 0$;

(b) $y^2 - 9 = 0$;

(c) $x^2 + 1 = 0$;

(d) $x^4 - 1 = 0$.

Solution: on se sert de la factorisation et de la propriété **N1**.

(a) On a

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \implies x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \implies x = 1, -1.$$

(b) On a

$$y^2 - 9 = (y-3)(y+3) = 0 \implies y-3 = 0 \text{ ou } y+3 = 0 \implies y = 3, -3.$$

(c) Il n'y a aucun nombre réel tel que $x^2 + 1 = 0$.

(d) On a

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \implies x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \text{ ou } x^2+1 = 0.$$

Mais $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Il ne reste que $x - 1 = 0$ et $x + 1 = 0$, d'où $x = 1$ et $x = -1$.

La méthode du **carré parfait** ne s'applique qu'à certains polynômes de degré pair. Soit a un nombre réel. Alors

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \quad \text{et} \quad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Le truc est de savoir reconnaître la forme d'un carré parfait.

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.
   (a) $x^2 + 2x + 1$;
   (b) $y^2 - 6y + 9$;
   (c) $x^4 + 2x^2 + 1$;
   (d) $x^2 + 2x - 1$.

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.

   (a) $x^2 + 2x + 1$;

   (b) $y^2 - 6y + 9$;

   (c) $x^4 + 2x^2 + 1$;

   (d) $x^2 + 2x - 1$.

Solution:

(a) Posons $a = 1$. Alors $2a = 2$ et $a^2 = 1 \implies x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

(b) Posons $a = -3$. Alors $2a = -6$ et $a^2 = 9 \implies y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$.

(c) Posons $y = x^2$. Alors

$$x^4 + 2x^2 + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 = (x^2+1)^2.$$

(d) Ce n'est pas un carré parfait ou une différence de carrés.

2. Résoudre les équations suivantes.
   (a) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
   (b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;
   (c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

Solution: on se sert de la factorisation et de la propriété **N1**.

(a) On a

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1.$$

(b) On a

$$y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2 = 0 \implies y - 3 = 0 \implies y = 3.$$

(c) On a

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 = 0 \implies x^2 + 1 = 0.$$

Mais $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, alors l'équation originale n'a pas de racine.

La différence de cubes et les cubes parfaits

La méthode de la **différence de cubes** ne s'applique qu'à certains polynômes dont le degré est un multiple de 3. Soit a un nombre réel. Alors

$$x^3 - a^3 = (x^2 + ax + a^2)(x - a).$$

Le facteur quadratique x^2+ax+a^2 est irréductible puisque son discriminant est

$$\Delta = a^2 - 4a^2 - 3a^2 < 0.$$

On a également

$$x^3 + a^3 = (x^2 - ax + a^2)(x + a);$$

c'est toujours une différence de cubes puisque $a^3 = -(-a)^3$.

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.
   (a) $x^3 - 1$;
   (b) $y^3 - 27$;
   (c) $z^3 + 8$.

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.
   (a) $x^3 - 1$;
   (b) $y^3 - 27$;
   (c) $z^3 + 8$.

Solution:

(a) Posons $a = 1$. Alors $a^3 = 1$, d'où $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$.

(b) Posons $a = 3$. Alors $a^3 = 27$, d'où $y^3 - 27 = (y^2 + 3y + 9)(y - 3)$.

(c) Posons $a = 2$. Alors $a^3 = 2$, d'où $z^3 + 8 = (z^2 - 2z + 4)(z + 2)$.

2. Résoudre les équations en suivantes.

(a) $x^3 - 1 = 0$;

(b) $y^3 - 27 = 0$;

(c) $x^3 = 0$;

(d) $z^3 + 8 = 0$.

2. Résoudre les équations en suivantes.

(a) $x^3 - 1 = 0$;

(b) $y^3 - 27 = 0$;

(c) $x^3 = 0$;

(d) $z^3 + 8 = 0$.

Solution: on utilise la factorisation et la propriété **N1** (le polynôme quadratique est toujours irréductible).

(a) On a $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1.$

(b) On a

$$y^3 - 27 = (y^2 + 3y + 9)(y - 3) = 0 \implies y - 3 = 0 \implies y = 3.$$

(c) On a $x^3 = xxx = 0 \implies x = 0.$

(d) On a

$$z^3 + 8 = (z^2 - 2z + 4)(z + 2) = 0 \implies z + 2 = 0 \implies z = -2.$$

La méthode du **cube parfait** ne s'applique qu'à certains polynômes dont le degré est un multiple de 3. Soit a un nombre réel. Alors

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3 \quad \text{et} \quad x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x - a)^3.$$

Exemples:

1. Factoriser les polynômes suivants.
   (a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
   (b) $\aleph^3 - 6\aleph^2 + 12\aleph - 8$;
   (c) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$;
   (d) $y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$.

Solution:

(a) Posons $a = 1$. Alors $3a = 3$, $3a^2 = 3$ et $a^3 = 1$, d'où

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

(b) Poson $a = -2$. Alors $3a = -6$, $3a^2 = 12$ et $a^3 = -8$, d'où

$$\aleph^3 - 6\aleph^2 + 12\aleph - 8 = (\aleph - 2)^3.$$

(c) Posons $y = x^2$. Alors

$$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y + 1)^3 = (x^2 + 1)^3.$$

(d) Posons $a = -1$. Alors $3a = -3$, $3a^2 = 3$ et $a^3 = -8$, d'où

$$y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1 = (y - 1)^3.$$

2. Résoudre les équations suivantes.

(a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

(b) $\aleph^3 - 6\aleph^2 + 12\aleph - 8$;

(c) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$;

(d) $y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$.

2. Résoudre les équations suivantes.

(a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

(b) $\aleph^3 - 6\aleph^2 + 12\aleph - 8$;

(c) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$;

(d) $y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$.

Solution: on utilise la factorisation et la propriété **N1**.

(a) On a

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1.$$

(b) On a

$$\aleph^3 - 6\aleph^2 + 12\aleph - 8 = (\aleph - 2)^3 = 0 \implies \aleph - 2 = 0 \implies \aleph = 2.$$

(c) On a

$$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^3 = 0 \implies x^2 + 1 = 0,$$

ce qui n'est jamais le cas.

(d) On a

$$y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1 = (y - 1)^3 = 0 \implies y - 1 = 0 \implies y = 1.$$

La complétion du carré et la formule quadratique

Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 - b \geq 0$. L'équation

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

peut se ré-écrire

$$0 = x^2 + 2ax + b = x^2 + 2ax + a^2 + b - a^2 = (x + a)^2 + b - a^2,$$

c'est-à-dire $(x + a)^2 = a^2 - b$, d'où

$$x + a = \pm\sqrt{a^2 - b} \implies x = \pm\sqrt{a^2 - b} - a.$$

Cette métode de recherche des **racines** (les solutions de l'équation) s'appelle la **complétion du carré**. Elle donne en même temps la factorisation

$$x^2 + 2ax + b = (x + \sqrt{a^2 - b} + a)(x - \sqrt{a^2 - b} + a).$$

De même, l'équation $x^2 - 2ax + b = 0$ possède les solutions

$$x = \pm\sqrt{a^2 - b} + a.$$

Exemples: résoudre les équations suivantes.

1. $y^2 - 7y + 12 = 0$;
2. $2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$;
3. $x^2 + 5x + 5 = 0$;
4. $x^2 - 5x - 5 = 0$.

Solutions:

1. $a = -\frac{7}{2}$ et $b = 12 \implies a^2 - b = \frac{49}{4} - 12 = \frac{1}{4} \geq 0$ et les racines sont

$$y = \sqrt{a^2 - b} - a = \sqrt{\frac{49}{4} - 12} + \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$$

$$y = -\sqrt{a^2 - b} - a = -\sqrt{\frac{49}{4} - 12} + \frac{7}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3.$$

2. L'équation suivante est équivalente: $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$. Puisque $a = -1$ et $b = -3$, on a $a^2 - b = (-1)^2 - (-3) = 4 \geq 0$ et les racines sont

$$\alpha = \sqrt{1^2 - b} - a = \sqrt{1 + 3} + 1 = \sqrt{4} + 1 = 3$$

$$\alpha = -\sqrt{1^2 - b} - a = -\sqrt{1 + 3} + 1 = -\sqrt{4} + 1 = -1.$$

3. $a = \frac{5}{2}$ et $b = 5 \implies a^2 - b = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \geq 0$ et les racines sont

$$x = \sqrt{\frac{25}{4} - 5} - \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{2}$$

$$x = -\sqrt{\frac{25}{4} - 5} - \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-\sqrt{5} - 5}{2}.$$

4. $a = -\frac{5}{2}$ et $b = -5 \implies a^2 - b = \frac{25}{4} - (-5) = \frac{45}{4} \geq 0$, et les racines sont

$$x = \sqrt{\frac{25}{4} + 5} + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{5}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2}$$

$$x = -\sqrt{\frac{25}{4} + 5} + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{5}{2} = -\frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} = \frac{-3\sqrt{5} + 5}{2}.$$

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $b^2 - 4ac \geq 0$. Les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette méthode de recherche des racines s'appelle la **formule quadratique**; on en connaissaît une version (incomplète) il y a 4000 ans!!!

Elle permet d'obtenir en même temps la factorisation

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad .
\end{aligned}$$

Exemples: résoudre les équations suivantes.

1. $y^2 - 7y + 12 = 0$;
2. $2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$;
3. $x^2 + 5x + 5 = 0$;
4. $x^2 + 5x + 10 = 0$.

Exemples: résoudre les équations suivantes.

1. $y^2 - 7y + 12 = 0$;
2. $2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$;
3. $x^2 + 5x + 5 = 0$;
4. $x^2 + 5x + 10 = 0$.

Solutions:

1. Puisque $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$, $b^2 - 4ac = 1 \geq 0$ et les racines sont

$$y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{49 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{49 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7-1}{2} = 3.$$

2. Puisque $a = 2$, $b = -4$ et $c = -6$, $b^2 - 4ac = 64 \geq 0$ et les racines sont

$$\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{4 \pm 8}{4} = 3, -1.$$

3. Puisque $a = 1$, $b = 5$ et $c = 5$, $b^2 - 4ac = 5 \geq 0$ et les racines sont

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

4. Puisque $a = 1$, $b = 5$ et $c = 10$, $b^2 - 4ac = -15 < 0$ et il n'y a aucune solution.

La division polynomiale

Cette méthode de factorisation s'applique à des polynômes dont une des racines est déjà connue.

Soient $p(x)$ un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(a) = 0$. Alors

$$p(x) = (x-a)q(x), \quad \text{avec } \deg q(x) = n-1.$$

La factorisation de $p(x)$ devient alors un problème de factorisation de $q(x)$, qui est plus simple à résoudre.

Exemples: factoriser les polynômes suivants en utilisant la racine a.

1. $x^3 - x^2 - 4x + 4$, $a = 1$;
2. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, $a = -1$;
3. $x^3 - x^2 - x - 2$, $a = 2$;
4. $x^4 + 5x^3 - 6x^2$, $a = 1$.

Exemples: factoriser les polynômes suivants en utilisant la racine a.

1. $x^3 - x^2 - 4x + 4$, $a = 1$;
2. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, $a = -1$;
3. $x^3 - x^2 - x - 2$, $a = 2$;
4. $x^4 + 5x^3 - 6x^2$, $a = 1$.

Solutions:

1. Il faut vérifier si $a = 1$ est bien une racine du polynôme. Puisque

$$1^3 - 1^2 - 4(1) + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0,$$

$x - 1$ est un facteur. On effectue la division polynomiale

$$(x^3 - x^2 - 4x + 4) \div (x - 1).$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\quad - 4 \\
\cline{2-2}
x-1 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\
 & -x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -4x + 4 \\
 & \qquad\qquad\ \ 4x - 4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

La factorisation recherchée est donc

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2).$$

2. Il faut vérifier si $a = -1$ est bien une racine du polynôme. Puisque

$$(-1)^4 + 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0,$$

$x + 1$ est un facteur. On effectue la division polynomiale

$$(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1) \quad \text{(page suivante)}.$$

La factorisation recherchée est donc

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1 = (x+1)(x^3+3x^2+3x+1) = (x+1)(x+1)^3 = (x+1)^4.$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & \underline{-x^4 - x^3} \\
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & \underline{-3x^3 - 3x^2} \\
 & 3x^2 + 4x \\
 & \underline{-3x^2 - 3x} \\
 & x + 1 \\
 & \underline{-x - 1} \\
 & 0
\end{array}
$$

3. Il faut vérifier si $a = 2$ est bien une racine du polynôme. Puisque

$$(2)^3 - (2)^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0,$$

$x - 2$ est un facteur. On effectue la division polynomiale

$$(x^3 - x^2 - x - 2) \div (x - 2) \quad \text{(page suivante)}.$$

La factorisation recherchée est donc

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1).$$

$$
\begin{array}{r}
x^2 + x + 1 \\
x-2 \overline{\smash{)}\, x^3 - x^2 - x - 2} \\
\underline{-x^3 + 2x^2 } \\
x^2 - x \\
\underline{-x^2 + 2x } \\
x - 2 \\
\underline{-x + 2} \\
0
\end{array}
$$

4. Il faut vérifier si $a = 1$ est bien une racine du polynôme. Puisque

$$(1)^4 + 5(1)^3 - 6(1)^2 = 1 + 5 - 6 = 0,$$

alors $x - 1$ est un facteur. On effectue la division polynomiale

$$(x^4 + 5x^3 - 6x^2) \div (x - 1) \quad \text{(page suivante).}$$

La factorisation recherchée est donc

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = (x - 1)(x^3 + 6x^2) = (x - 1)x^2(x + 6).$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 6x^2 \\
\hline
x - 1 & x^4 + 5x^3 - 6x^2 \\
 & \underline{-x^4 + x^3} \\
 & 6x^3 - 6x^2 \\
 & \underline{-6x^3 + 6x^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

Résumé

Exercices suggérés