MAT 1700
Méthodes mathématiques I

Chapitre 5
La dérivée

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2021

Aperçu

5.1 – La définition de la dérivée

Au chapitre 2, nous avons remarqué que plusieurs problèmes intéressants sont résolus à l'aide du calcul de la limite d'un quotient différentiel.

La **dérivée de f par rapport à x en $x = a$**, est

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

si cette limite existe.

⚠ **La limite ne peut être évaluée par substitution puisque le quotient est indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$.**

Exemples:

1. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = -3$?

Exemples:

1. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = -3$?

   Solution: d'après la définition, la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = -3$ est

$$
\begin{aligned}
f'(-3) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-3+\Delta x) - f(-3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-3+\Delta x)^2 - (-3)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 - 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-6+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-6 + \Delta x) = -6.
\end{aligned}
$$

2. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = 2$?

2. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = 2$?

   Solution: d'après la définition, la dérivée de $f(x) = x^2$ en $x = 2$ est

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4. \end{aligned}$$

L'approche pour calculer $f'(-3)$ et $f'(2)$ est identique.

Si la limite existe, la **dérivée de f par rapport à x** est

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La différence entre $f'(a)$ et $f'(x)$ est simple:

- on calcule en un point particulier $x = a$, le résultat est un nombre $f'(a)$;
- on calcule simultanément pour tout x, le résultat est une fonction $f'(x)$.

On peut retrouver le résultat donné par la première approche en substituant $x = a$ dans la fonction donnée par la seconde.

Plusieurs des applications étudiées jusqu'à présent peuvent être reformulé en terme de la dérivée:

- la pente m de la droite tangente au graphe de $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est $m = f'(a)$;
- la vitesse v d'un objet qui se déplace selon $s(t)$ lorsque $t = t_0$ est $v = s'(t_0)$, et
- le taux de variation de la fonction $y = f(x)$ par rapport à x lorsque $x = a$ est $f'(a)$.

Exemples:

1. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2$ par rapport à x.

Exemples:

1. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2$ par rapport à x.

   Solution: en utilisant la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.
\end{aligned}$$

2. Calculer le taux de variation de $y = g(x) = 2\sqrt{x}$ par rapport à $x > 0$.

2. Calculer le taux de variation de $y = g(x) = 2\sqrt{x}$ par rapport à $x > 0$.

Solution: en utilisant la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{x+\Delta x} - 2\sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0} \implies$ il faut rationaliser.

Ainsi

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = 2 \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Le taux de variation est $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x > 0$ (même si $g(0)$ existe).

Le taux de variation de y par rapport à x lorsque $x = 4$ est $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, e.g.

3. Calculer la pente de la droite tangente au graphe de $y = f(x) = x^2$ lorsque $x = -2$.

   Solution: on cherche $f'(-2)$. Mais $f'(x) = 2x$ (exemple 1), d'où $f'(-2) = 2(-2) = -4$.

4. Calculer la vitesse d'un objet qui se déplace selon $s(t) = t^2$ lorsque $t = 0$.

   Solution: on cherche $s'(0)$. Puisque, $v(t) = s'(t) = 2t$, $v(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

5. Calculer le taux de variation de $y = f(x) = x^2$ par rapport à x lorsque $x = 2$.

   Solution: on cherche $f'(2)$. Puisque $f'(x) = 2x$, on a $f'(2) = 2(2) = 4$.

Il est souvent avantageux de calculer la dérivée de la fonction au lieu de la calculer en un point particulier: dans l'exemple qui précède, il est facile de répondre aux questions 3–5 lorsque $f'(x)$ est déjà connue.

La **notation de Leibniz** simplifie et allège parfois les expressions utilisées: on note la **dérivée de** $y = f(x)$ **par rapport à** x **en** $x = a$ par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

⚠ Le symbole $\frac{dy}{dx}$ n'est pas une fraction!

Exemple: la dérivée de $y = x^2$ par rapport à x est $\frac{dy}{dx} = 2x$; celle de $y = 2\sqrt{x}$ par rapport à x est $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

La dérivée d'une fonction continue est-elle continue? Pour toute fonction continue f, il faudrait que $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$, pour tout a. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

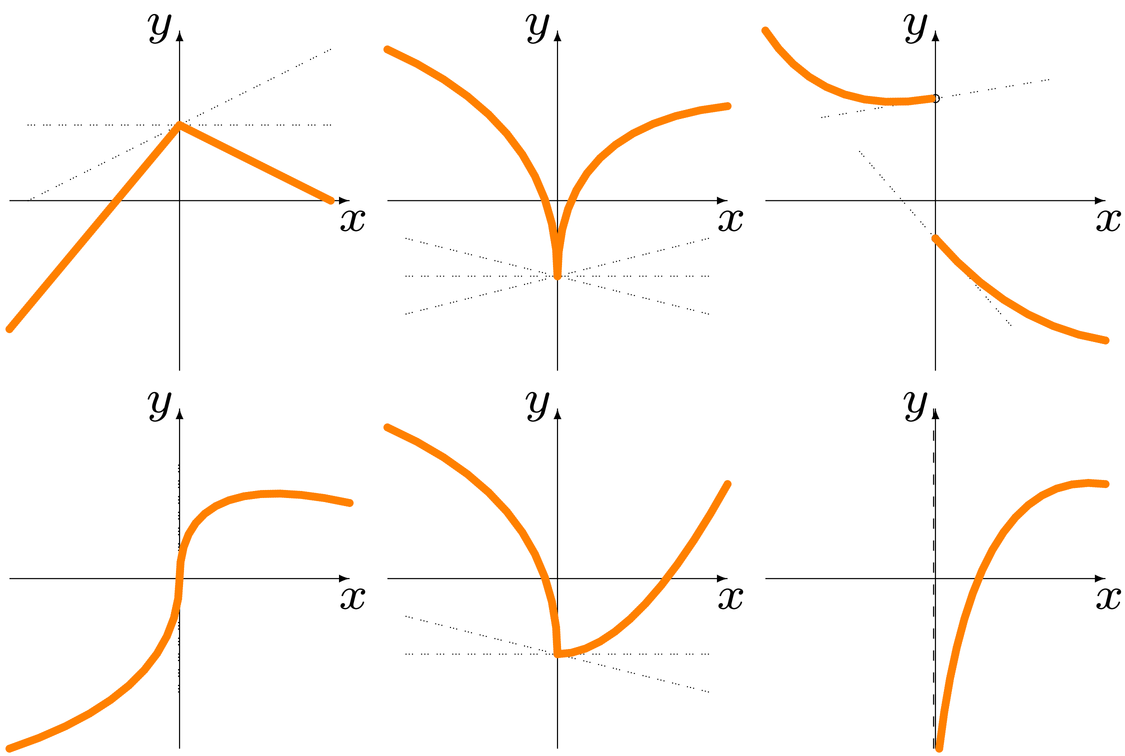
par exemple, est continue en $x = 0$ (pourquoi?), mais sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ne l'est pas puisque ni $f'(0)$ (pourquoi?) ni $\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existent:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x = 0.$$

Une fonction continue peut donc ne pas être différentiable en un point particulier, s'il n'existe pas de droite tangente en ce point, ou si la pente de la droite tangente est indéfinie (si c'est une droite verticale).



En théorie, la définition de la dérivée est suffisante afin de la calculer.

⚠ **En pratique, ce n'est pas une méthode très utile:** comment calculerait-on la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 + 1}}?$$

Selon la définition, on a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\frac{(x+h)^2+\sqrt{x+h}}{(x+h)^3+1}} - \sqrt{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3+1}}}{h} = \cdots$$

Il est grand temps de trouver un raccourci!

5.2 – La dérivée d'un polynôme

La **dérivée d'un polynôme** est particulièrement facile à calculer. Il faut être capable de dériver quatre types de fonctions:

- les puissances entières positives;
- les constantes;
- les multiples d'une fonction, et
- les sommes de fonctions.

Dans les deux derniers cas, les règles sont aussi valides pour plusieurs autres types de fonctions.

La dérivée d'une puissance entière positive

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f(x) = x^n$ est un **polynôme fondamental** (les polynômes sont composé de termes de cette forme). Quelle est sa dérivée?

La **formule du binôme** est un résultat utile pour répondre à cette question. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Théorème: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.

Note: n est le **degré** de $f(x) = x^n$.

Démonstration: d'après la définition de la dérivée et la formule du binôme,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 = nx^{n-1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = x^n \implies \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^8$.

2. $y = x^{1001}$.

3. $g(p) = p^2$.

Solutions: en utilisant le théorème directement, nous obtenons

1. $f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$.

2. $\frac{dy}{dx} = 1001x^{1001-1} = 1001x^{1000}$.

3. $g'(p) = 2p^{2-1} = 2p$.

⚠ **Les variables ne sont pas toujours x et y; on note que $g'(p)$ est la dérivée de g par rapport à p, et non par rapport à x: $\frac{dg}{dp} \neq \frac{dg}{dx}$.**

Quand le contexte le permet, on n'a pas à spécifier la variable par rapport à laquelle on dérive. Pour les fonctions à plusieurs variables, il faut toujours le faire. Nous en reparlerons au chapitre 10.

La dérivée d'une constante

Soit $k \in \mathbb{R}$. La **fonction constante à valeur** k donnée par $f(x) = k = kx^0$ est un polynôme de degré $0 \notin \mathbb{N}$.

Théorème: pour tout $k \in \mathbb{R}$, la dérivée de $f(x) = k$ est $f'(x) = 0$.

Démonstration: d'après la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = k \implies \frac{dy}{dx} = 0.$$

D'un point de vue géométrique, $f(x) = k$ est l'équation de la droite constante à valeur k. La droite tangente à cette courbe est la droite d'équation $y = k$, dont la pente est 0.

Exemple: calculer la dérivée $\frac{dm}{dn}$ de $m = k$.

Solution: en utilisant le théorème directement, nous obtenons $\frac{dm}{dn} = 0$.

La dérivée d'un multiple d'une fonction

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la dérivée d'un polynôme plus complexe.

Théorème: si $g(x)$ est une fonction dérivable (ou différentiable) et k une constante, la dérivée de $f(x) = kg(x)$ est $f'(x) = kg'(x)$.

Démonstration: d'après la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kg(x+\Delta x) - kg(x)}{\Delta x} \\ &= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = kg'(x). \qquad \square \end{aligned}$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = ku \implies \frac{dy}{dx} = k\frac{du}{dx}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $y = 3x^8$.

2. $u = 1000w^{1000}$.

3. $h(x) = 3$.

Solutions: en utilisant les théorèmes directement, nous obtenons

1. $\frac{dy}{dx} = 3\frac{d(x^8)}{dx} = 3 \cdot 8x^7 = 24x^7$.

2. $\frac{du}{dw} = 1000\frac{d(w^{1000})}{dw} = 1000 \cdot 1000w^{999} = 1000000w^{999}$.

3. $h'(x) = 0$.

⚠ **La forme spécifique de g n'est pas importante.**

Si tout ce que nous savons au sujet des fonctions $\sin$ et $\cos$ est que la dérivée de $g(x) = \sin x$ est $g'(x) = \cos x$, par exemple, la dérivée de $f(x) = 3\sin x$ est automatiquement

$$f'(x) = 3(\sin x)' = 3\frac{d(\sin x)}{dx} = 3\cos x.$$

La dérivée d'une somme de fonctions

Quelle serait la dérivée de

$$f(x) = 227x^{1001} + 3x^8 + x^2?$$

En fin de compte, pour savoir dériver un polynôme, il faut savoir dériver une **somme de fonctions**.

Théorème: si $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions différentiables, la dérivée de $f(x) = p(x) + q(x)$ est $f'(x) = p'(x) + q'(x)$.

Démonstration: d'après la définition de la dérivée, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x) + q(x+\Delta x) - (p(x)+q(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x) - p(x) + q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} + \frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} \\
&= p'(x) + q'(x). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = u + v \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 227x^{1001} + 3x^8 + x^2.$

2. $h(u) = u^7 - 9u^3.$

3. $p = q^8 + 100000q^3 + \pi.$

4. $m = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n + 1.$

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $f'(x) = 227 \cdot 1001x^{1000} + 3 \cdot 8x^7 + 2x = 227227x^{1000} + 24x^7 + 2x.$

2. $h'(u) = 7u^6 - 9 \cdot 3u^2 = 7u^6 - 27u^2.$

3. $\frac{dp}{dq} = \frac{d(q^8)}{dq} + 100000\frac{d(q^3)}{dq} + \frac{d(\pi)}{dq} = 8q^7 + 100000 \cdot 3q^2 + 0 = 8q^7 + 300000q^2.$

4. $\frac{dm}{dn} = \frac{1}{3}\frac{d(n^3)}{dn} + \frac{1}{2}\frac{d(n^2)}{dn} + \frac{d(n)}{dn} + \frac{d(1)}{dn} = \frac{3n^2}{3} + \frac{2n}{2} + 1 + 0 = n^2 + n + 1.$

⚠ **Ce résultat est valide pour toutes fonctions différentiables p et q.** On peut le généraliser à des sommes (finies) de plus de deux fonctions:

$$\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d(v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}.$$

La dérivée d'une puissance entière positive (reprise)

Peut-on se servir de ces règles pour dériver des fonctions de la forme

$$f(x) = [g(x)]^n, \quad \text{où } g \text{ est différentiable et continue et } n \in \mathbb{N}?$$

Par exemple, si $g(x) = x$, alors $f(x) = x^n$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Le résultat suivant s'avère utile: soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a-b)^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Théorème: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(x)$ différentiable et continue, la dérivée de $f(x) = [g(x)]^n$ est $f'(x) = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$.

Démonstration: d'après la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{x+\Delta x} - f_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g^n_{x+\Delta x} - g^n_x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g_{x+\Delta x} - g_x)\left(g^{n-1}_{x+\Delta x} + \cdots + g^{n-1}_x\right)}{\Delta x} \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g_{x+\Delta x} - g_x}{\Delta x}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \left(g^{n-1}_{x+\Delta x} + \cdots + g^{n-1}_x\right) \\
&= g'(x)\left(g^{n-1}_{x+0} + g^{n-2}_{x+0} g_x + \cdots + g^{n-1}_x\right) \\
&= g'(x) \underbrace{\left(g^{n-1}_x + g^{n-1}_x + \cdots + g^{n-1}_x\right)}_{n \text{ fois}} = n[g(x)]^{n-1} g'(x),
\end{aligned}$$

puisque tout polynôme g_x est continu ($\Longrightarrow \lim_{\Delta_x \to 0} g_{x+\Delta x} = g_x$). $\square$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = u^n \implies \frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x^2 + 3x)^9$.
2. $z = (36\alpha^8 + 3\alpha)^3$.

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = u^n \implies \frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x^2 + 3x)^9$.
2. $z = (36\alpha^8 + 3\alpha)^3$.

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $f'(x) = 9(2x^2 + 3x)^{9-1}(2x^2 + 3x)' = 9(2x^2 + 3x)^8(4x + 3)$.
2. $\frac{dz}{d\alpha} = 3(36\alpha^8 + 3\alpha)^{3-1} \cdot \frac{d(36\alpha^8+3\alpha)}{d\alpha} = 3(36\alpha^8 + 3\alpha)^2(288\alpha^7 + 3)$.

5.3 – La dérivée d'un produit de fonctions

Jusqu'à présent, il n'y a pas de grosse surprise: la dérivée se comporte comme on pourrait s'y attendre. Qu'en est-il du **produit de fonctions**

$$f(x) = p(x)q(x), \quad p, q \text{ différentiables et continues?}$$

⚠ **Dans un monde idéal, on obtiendrait $f'(x) = p'(x)q'(x)$, mais ce n'est pas ce qui se passe en réalité.**

Théorème: si $p(x), q(x)$ sont différentiables et continues, la dérivée de $f(x) = p(x)q(x)$ est

$$f'(x) = p(x)q'(x) + p'(x)q(x).$$

Démonstration: puisque p est continue, $\lim_{\Delta x \to 0} p_{x+\Delta x} = p_x$. De plus,

$$p_{x+\Delta x} q_x - p_{x+\Delta x} q_x = 0.$$

D'après la définition de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{x+\Delta x} - f_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_{x+\Delta x} q_{x+\Delta x} - p_x q_x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_{x+\Delta x} q_{x+\Delta x} + 0 - p_x q_x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_{x+\Delta x} q_{x+\Delta x} + p_{x+\Delta x} q_x - p_{x+\Delta x} q_x - p_x q_x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_{x+\Delta x} \left[q_{x+\Delta x} - q_x \right] + q_x \left[p_{x+\Delta x} - p_x \right]}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(p_{x+\Delta x} \frac{[q_{x+\Delta x} - q_x]}{\Delta x} + q_x \frac{[p_{x+\Delta x} - p_x]}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(p_{x+\Delta x} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(q_x \frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} \right) \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} p_{x+\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} \right) + q_x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} \right) \\
&= p_{x=0} q'(x) + p'(x) q_x = p(x) q'(x) + p'(x) q(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

⚠ **Notation:** $h_\xi = h(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et toute fonction h.

Avec la notation de Leibniz, le théorème

$$y = uv \implies \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x^9 + 18x^2 + 2x - 1)(x^{10} + x^9 + x^8 + x^2 - 1)$.

2. $w = (m^3 + m + 1)(2m^2 + 1)$.

3. $g(y) = (2y + 1)(3y + 1)(4y + 1)$.

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $$\begin{aligned} f'(x) &= (x^9+18x^2+2x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^2-1)' \\ &\quad +(x^9+18x^2+2x-1)'(x^{10}+x^9+x^8+x^2-1) \\ &= (x^9+18x^2+2x-1)(10x^9+9x^8+8x^7+2x) \\ &\quad +(9x^8+36x+2)(x^{10}+x^9+x^8+x^2-1). \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{dw}{dm} &= (m^3+m+1)(2m^2+1)'+(m^3+m+1)'(2m^2+1) \\ &= (m^3+m+1)(4m)+(3m^2+1)(2m^2+1). \end{aligned}$$

3. En ré-organisant les termes, nous obtenons

$$g(y) = \left[(2y+1)(3y+1)\right](4y+1).$$

Alors

$$\begin{aligned}
g'(y) &= [(2y+1)(3y+1)]\,(4y+1)' + [(2y+1)(3y+1)]'\,(4y+1) \\
&= (2y+1)(3y+1)4 + [(2y+1)(3y+1)]'\,(4y+1) \\
&= (2y+1)(3y+1)4 + \{(2y+1)(3y+1)' + (2y+1)'(3y+1)\}\,(4y+1) \\
&= (2y+1)(3y+1)4 + \{(2y+1)3 + 2(3y+1)\}(4y+1) \\
&= (2y+1)(3y+1)4 + (12y+5)(4y+1).
\end{aligned}$$

On peut généraliser à des produits (finis) de plus de deux fonctions:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5.4 – La dérivée d'un quotient de fonctions

Après avoir attaqué les produits, on s'en prend aux **quotients de fonctions**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p, q \text{ **différentiables et continues** }, q(x) \neq 0.$$

⚠ **Dans un monde idéal, on obtiendrait $f'(x) = p'(x)/q'(x)$, mais ce n'est pas ce qui se passe en réalité.**

Théorème: si $p(x), q(x)$ sont différentiables et continues, avec $q(x) \neq 0$, la dérivée de $f(x) = p(x)/q(x)$ est

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2}.$$

Démonstration: si $f(x) = p(x)/q(x)$, alors $f(x)q(x) = p(x)$. Selon le théorème sur la dérivée des produits,

$$\begin{aligned} p'(x) = f(x)q'(x) + f'(x)q(x) &\implies f'(x)q(x) = p'(x) - f(x)q'(x) \\ &\implies f'(x) = \frac{p'(x) - f(x)q'(x)}{q(x)}. \end{aligned}$$

Mais $f(x) = p(x)/q(x)$, d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p'(x) - \frac{p(x)}{q(x)}q'(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)\frac{q(x)}{q(x)} - \frac{p(x)}{q(x)}q'(x)}{q(x)} \\ &= \frac{\frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)}}{q(x)} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2} \qquad \square \end{aligned}$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = \frac{u}{v} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

⚠ L'ordre dans lequel on dérive les facteurs d'un produit n'est pas important, puisque l'addition est commutative. En effet,

$$p(x)q'(x) + p'(x)q(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

L'ordre de différentiation est important pour la dérivée d'un quotient puisque la soustraction n'est pas commutative. En général

$$\frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2} \neq \frac{p(x)q'(x) - p'(x)q(x)}{(q(x))^2}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $y = \dfrac{2x^2+1}{3x+2}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $y = \dfrac{2x^2+1}{3x+2}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2+1)'(3x+2) - (2x^2+1)(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{4x(3x+2) - (2x^2+1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{6x^2+8x-3}{(3x+2)^2}.$$

2. $$f'(x) = \frac{(1)'x^3 - 1\cdot(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{0\cdot x^3 - 3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}.$$

La dérivée d'une puissance entière négative

On peut généraliser le résultat obtenu à la seconde partie du dernier exemple.

Théorème: si $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de $f(x) = x^{-n}$ est $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Démonstration: nous utilisons le théorème sur la dérivée des quotients:

$$f'(x) = \frac{\frac{d(1)}{dx}x^n - 1\frac{d(x^n)}{dx}}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}. \qquad \square$$

Avec la notation de Leibniz, nous avons $y = x^{-n} \implies \frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$.

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{3}{x^8} = 3x^{-8}$.

2. $w = -\frac{1}{\omega^{24}} = -\omega^{-24}$.

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{3}{x^8} = 3x^{-8}$.

2. $w = -\frac{1}{\omega^{24}} = -\omega^{-24}$.

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $f'(x) = 3 \cdot (-8)x^{-8-1} = -24x^{-9}$.

2. $\dfrac{dw}{d\omega} = -1 \cdot (-24)\omega^{-24-1} = 24\omega^{-25}$.

Ceci nous permet de généraliser à ce qui suit.

Théorème: si $n \in \mathbb{Z}$, la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.

Avec la notation de Leibniz, nous avons

$$y = x^n \implies \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

⚠ **Éventuellement, nous allons montrer que cette règle est valide pour tout $n \in \mathbb{R}$, mais pour l'instant, elle n'est valide que pour $n \in \mathbb{Z}$.**

5.5 – La dérivée en chaîne

Dans certains cas, il est possible de simplifier le calcul de la dérivée de $f(x)$ en réalisant que c'est une composition de fonctions

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)).$$

Par exemple, il est possible de ré-écrire $f(x) = (2x^3 + 1)^8$ comme la composition de $g(y) = y^8$ et $h(x) = 2x^3 + 1$, puisque

$$g(h(x)) = g(2x^3 + 1) = (2x^3 + 1)^8 = f(x).$$

Remarques:

1. g est la **composante externe de** $g \circ h$ et h est sa **composante interne**.

2. En général, $g \circ h \neq h \circ g$.

   Par exemple, si $g(x) = \frac{x^2+1}{3x^{17}+2}$ et $h(x) = x^2 + 1$, alors

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{(h(x))^2 + 1}{3(h(x))^{17} + 2} = \frac{(x^2 + 1)^2 + 1}{3(x^2 + 1)^{17} + 2},$$

   tandis que

$$q(x) = h(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = \left(\frac{x^2 + 1}{3x^{17} + 2}\right)^2 + 1.$$

   Ici, g est la composante externe de f et la composante interne de q, tandis que h est la composante interne de f et la composante externe de q.

La **dérivée en chaîne** permet de dériver les compositions de fonctions. D'une certaine façon, c'est le résultat le plus important de ce chapitre.

Théorm̀e: si $g(x), h(x)$ sont différentiables, la dérivée de de $f(x) = g(h(x))$ est $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.

Nous ne donnerons pas la démonstration assez compliquée de ce résultat.

La notation de Leibniz est particulièrement utile pour la dérivée en chaîne:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\text{composante externe})'(\text{composante interne})'.$$

⚠ **On peut s'imaginer que le numérateur du de la composante interne et le dénominateur du de la composante externe s'annulent, mais il faut se souvenir que ce ne sont pas des fractions.**

Vous devez absolument savoir comment calculer les dérivées en chaîne.

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x^3 + 1)^8$.

2. $y = \dfrac{(x^2+1)^2+1}{3(x^2+1)^{17}+2}$.

3. $q = \left(\dfrac{t^2+1}{3t^{17}+2}\right)^2 + 1$.

Solutions: on utilise les théorèmes précédents.

1. Posons $g(y) = y^8$ et $h(x) = 2x^3 + 1$; alors $f(x) = g(h(x))$. Puisque

$$g'(y) = 8y^7 \quad \text{et} \quad h'(x) = 6x^2,$$

   nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x))h'(x) &= 8(h(x))^7 \cdot 6x^2 \\ &= 8(2x^3+1)^7 \cdot 6x^2 = 48x^2(2x^3+1)^7. \end{aligned}$$

2. Posons $u = x^2 + 1$. Alors $y = \frac{u^2+1}{3u^{17}+2}$. Puisque $\frac{du}{dx} = 2x$ et

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u^2+1)'(3u^{17}+2) - (u^2+1)(3u^{17}+2)'}{(3u^{17}+2)^2}$$
$$= \frac{2u(3u^{17}+2) - (u^2+1)51u^{16}}{(3u^{17}+2)^2} = \frac{-45u^{18} - 51u^{16} + 4u}{(3u^{17}+2)^2},$$

nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{-45u^{18} - 51u^{16} + 4u}{(3u^{17}+2)^2} \cdot 2x$$
$$= \frac{-45(x^2+1)^{18} - 51(x^2+1)^{16} + 4(x^2+1)}{(3(x^2+1)^{17}+2)^2} \cdot 2x.$$

3. Posons $u = \frac{t^2+1}{3t^{17}+2}$. Alors $q = u^2 + 1$. Puisque $\frac{dq}{du} = 2u$ et

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{(t^2+1)'(3t^{17}+2) - (t^2+1)(3t^{17}+2)'}{(3t^{17}+2)^2} \\ &= \frac{2t(3t^{17}+2) - (t^2+1)51t^{16}}{(3t^{17}+2)^2} = \frac{-45t^{18} - 51t^{16} + 4t}{(3t^{17}+2)^2},\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2u \cdot \frac{-45t^{18} - 51t^{16} + 4t}{(3t^{17}+2)^2} \\ &= 2\left(\frac{t^2+1}{3t^{17}+2}\right) \frac{-45t^{18} - 51t^{16} + 4t}{(3t^{17}+2)^2}.\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction inverse

Au chapitre 4, nous avons vu que les fonctions injectives sont **inversibles**.

Par définition,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

En utilisant la règle de dérivée en chaîne, nous obtenons

$$f'(f^{-1}(x)) \left(f^{-1}\right)'(x) = 1,$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exemples: calculer la dérivée de l'inverse des fonctions suivantes.

1. $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, où $f(x) = x^2$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 3x + 4$.

Exemples: calculer la dérivée de l'inverse des fonctions suivantes.

1. $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$, où $f(x) = x^2$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 3x + 4$.

Solutions: on utilise le résultat précédent.

1. La fonction inverse est $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$, où $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. De plus, $f'(x) = 2x$. Ainsi,
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$
d'où
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. La fonction inverse est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$. De plus, $f'(x) = 3$. Ainsi,
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$
d'où
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(\frac{x-4}{3}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Nous terminons ce chapitre en montrant comment résoudre le problème du premier scénario du chapitre 2 – trouver l'équation de la tangente au cercle – sans faire appel à la propriété géométriques du cercle qui dit que le rayon est perpendiculaire à la tangente.

5.6 – La dérivée implicite

La dérivée d'une fonction correspond à la pente de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction.

Mais la plupart des courbes proviennent de **relations** entre x et y pour lesquelles on ne peut pas isoler $y = f(x)$ et retrouver la courbe dans son entièreté (les courbes ne correspondent pas à des **fonctions**).

Ces courbes ont des droites tangentes; comment calcule-t-on leur pente?

Exemples:

1. Calculer l'équation de la droite tangente au cercle d'équation $x^2+y^2 = 25$ au point $P(-3, 4)$.

Solution: puisque $(-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, le point $P(-3,4)$ se retrouve effectivement sur la courbe.

En général, la pente de la droite tangente est $\frac{dy}{dx}$. On dérive l'équation $x^2 + y^2 = 25$ par rapport à x:

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = \frac{d(25)}{dx},$$

d'où

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0.$$

En utilisant la règle de dérivée en chaîne, nous obtenons $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Ainsi, lorsque $x = -3$ et $y = 4$ (c'est-à-dire au point P), la pente de la droite tangente est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(-3)}{4} = \frac{3}{4}.$$

L'équation de la droite tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ au point $P(-3, 4)$ est alors

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies \frac{3}{4} = \frac{y-4}{x+3}.$$

Remarque: sur le cercle,

$$\frac{dy}{dx} \cdot m_{OP} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1 \implies \text{tg} \perp \text{rayon.}$$

2. Calculer l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation

$$y^5 + x^2y - 2x^2 = -1$$

au point $(\sqrt{2}, 1)$.

Solution: puisque $1^5 + (\sqrt{2})^2 \cdot 1 - 2(\sqrt{2})^2 = 1 + 2 - 4 = -1$, le point $(\sqrt{2}, 1)$ se retrouve sur la courbe.

On trouve $\frac{dy}{dx}$ en dérivant l'équation $y^5 + x^2y - 2x^2 = -1$ par rapport à x:

$$\frac{d(y^5 + x^2y - 2x^2)}{dx} = \frac{d(-1)}{dx},$$

d'où

$$\frac{d(y^5)}{dx} + \frac{d(x^2y)}{dx} - 2\frac{d(x^2)}{dx} = 0.$$

En utilisant la règle de dérivée en chaîne et la règle de dérivée de produits, nous obtenons

$$5y^4\frac{dy}{dx}+\frac{d(x^2)}{dx}y+x^2\frac{dy}{dx}-2(2x)=0 \implies$$
$$5y^4\frac{dy}{dx}+2xy+x^2\frac{dy}{dx}-4x=0.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-2xy}{5y^4+x^2}\overset{(\sqrt{2},1)}{\implies} m=\frac{dy}{dx}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}1}{5\cdot 1+(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{7},$$

et l'équation de la droite recherchée est $\dfrac{2\sqrt{2}}{7}=\dfrac{y-1}{x-\sqrt{2}}$.

Le principe de **dérivée implicite** est simple: on applique la dérivée en chaîne des deux côtés de la relation.

Si l'on cherche $\frac{dy}{dx}$, on dérive l'expression en x et y par rapport à x; si l'on cherche $\frac{dx}{dy}$, on la dérive par rapport à y.

Exemples: calculer les dérivées suivantes.

1. $\dfrac{d(y^5)}{dy}$.
2. $\dfrac{d(y^5)}{dx}$.
3. $\dfrac{d(m^2n^2)}{dm}$.
4. $\dfrac{d(m^2n^2)}{dn}$.

Solution:

1. C'est une dérivée de puissance, puisque l'on dérive par rapport à la même variable que celle qui apparaît dans l'expression: $\frac{d(y^5)}{dy} = 5y^4$.

2. Il faut utiliser la dérivée en chaîne. Posons $u = y^5$. Alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 5y^4\frac{dy}{dx} \implies \frac{d(y^5)}{dx} = 5y^4\frac{dy}{dx}.$$

3. On utilise la dérivée en chaîne et la dérivée des produits:

$$\frac{d(m^2n^2)}{dm} = \frac{d(m^2)}{dm}n^2 + m^2\frac{d(n^2)}{dm} = 2mn^2 + m^2\left(2n\frac{dn}{dm}\right) = 2mn^2 + 2m^2n\frac{dn}{dm}.$$

4. On utilise la dérivée en chaîne et la dérivée des produits:

$$\frac{d(m^2n^2)}{dn} = \frac{d(m^2)}{dn}n^2 + m^2\frac{d(n^2)}{dn} = 2m\frac{dm}{dn}n^2 + m^2(2n) = 2mn^2\frac{dm}{dn} + 2m^2n.$$

On peut aussi utiliser la dérivée implicite même si la relation entre x et y est explicite.

Exemple: calculer le taux de variation de $y = (8 - x^3)^{1/4}$ p.r. à x.

Solution: on cherche $\frac{dy}{dx}$, mais nous ne savons pas calculer la dérivée d'une puissance rationnelle. Cependant,

$$y = (8 - x^3)^{1/4} \implies y^4 = 8 - x^3.$$

On dérive implicitement par rapport à x:

$$\frac{d(y^4)}{dx} = \frac{d(8-x^3)}{dx} \implies 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2}{4y^3} = \frac{-3x^2}{4\left((8-x^3)^{1/4}\right)^3} = \frac{-3x^2}{4(8-x^3)^{3/4}}$$
$$= \frac{1}{4}(8-x^3)^{-3/4}(-3x^2).$$

La dérivée implicite nous permet donc de calculer la dérivée de racines n-ièmes.

La dérivée d'une puissance entière rationnelle

Il est possible de généraliser le résultat précédent. Un nombre rationnel est un nombre de la forme $q = \frac{p}{r}$ où $r \neq 0, p \in GZ$.

Théorème: si $q \in \mathbb{Q}$ et g est une fonction différentiable, la dérivée de $f(x) = [g(x)]^q$ est $f'(x) = q[g(x)]^{q-1}g'(x)$.

Démonstration: posons $q = \frac{p}{r}$ et $y = g(x)^q = g(x)^{p/r}$. Alors $y^r = [g(x)]^p$. En dérivant implicitement cette relation par rapport à x, et en utilisant le théorème sur les dérivées de puissances entières, nous obtenons

$$\frac{d(y^r)}{dx} = \frac{d\left([g(x)]^p\right)}{dx} \implies ry^{r-1}\frac{dy}{dx} = p \cdot [g(x)]^{p-1}g'(x).$$

En isolant $\frac{dy}{dx}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{p}{r} \cdot \frac{[g(x)]^{p-1}}{y^{r-1}} \cdot g'(x) = q\frac{[g(x)]^{p-1}}{\left([g(x)]^{p/r}\right)^{r-1}} \cdot g'(x) \\ &= q \cdot \frac{[g(x)]^{p-1}}{[g(x)]^{(p/r)(r-1)}} \cdot g'(x) \\ &= q \cdot [g(x)]^{(p-1)-(p/r)(r-1)} \cdot g'(x) \\ &= q \cdot [g(x)]^{p/r-1} \cdot g'(x) = q \cdot g(x)^{q-1} \cdot g'(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Avec la notation de Leibniz, le théorème devient

$$y = u^q \implies \frac{dy}{dx} = qu^{q-1}\frac{du}{dx}.$$

Exemples: calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^{-2/3}$.

2. $y = \frac{1+x^{1/2}}{2x+1}$.

3. $h(\beta) = 3\beta^{1/3} + 2\beta^{1/2} + \beta + 1$.

4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^3+1}}$.

Solutions: en utilisant les théorèmes précédents, nous obtenons

1. $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2/3-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$.

2. $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1+x^{1/2})'(2x+1)-(1+x^{1/2})(2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{1/2-1}(2x+1)-(1+x^{1/2})2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(2x+1)-2(1+x^{1/2})}{(2x+1)^2}.\end{aligned}$$

3. $h'(\beta) = 3\frac{1}{3}\beta^{1/3-1} + 2\frac{1}{2}\beta^{1/2-1} + 1 + 0 = \beta^{-2/3} + \beta^{-1/2} + 1$.

4. Posons $g(x) = x^{1/2}$ et $h(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x^3+1}$. Alors $f(x) = g(h(x))$ et

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$

Mais $g'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}$, d'où $g'(h(x)) = \frac{h(x)^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^3+1}\right)^{-1/2}$. De plus,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{d(x+\sqrt{x})}{dx}(x^3+1) - (x+\sqrt{x})\frac{d(x^3+1)}{dx}}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{2}x^{-1/2})(x^3+1) - (x+\sqrt{x})(3x^2)}{(x^3+1)^2}. \end{aligned}$$

Alors $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3+1}{x+\sqrt{x}}\right)^{-1/2} \cdot \dfrac{(1+\frac{1}{2}x^{-1/2})(x^3+1) - (x+\sqrt{x})(3x^2)}{(x^3+1)^2}$.

Nous pouvons maintenant obtenir la dérivée de toute fonction algébrique.

Les règles obtenues dans ce chapitre s'appliquent aussi aux fonctions transcendantes: on doit seulement connaître la dérivée des équivalents des polynômes fondamentaux ($\cos$, $\sin$, $\exp$, $\ln$, etc.), qui se calculent à l'aide de la définition de la dérivée.

Le chapitre 5 est en quelque sorte la grammaire du calcul différentiel: simplement dit, il faut savoir calculer la dérivée de fonctions.

Nous discuterons des applications de ces dérivées au chapitre 6.

⚠ **C'est en forgeant que l'on devient forgeron. Pratiquez!**

Résumé

Exercices suggérés