MAT 1700
Méthodes mathématiques I

Chapitre 6
Les applications de la dérivée

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2021

Aperçu

6.1 – Les dérivées d'ordre supérieur (p.3)

- L'accélération (p.8)

6.2 – L'optimisation d'une fonction (p.15)

- La marche à suivre (p.25)

6.3 – L'étude d'une fonction (p.43)

- Les asymptotes verticales (p.44)
- Les asymptotes horizontales (p.53)
- Les intervalles de croissance (p.65)
- Les intervalles de concavité (p.70)
- La marche à suivre (p.77)

6.4 – L'élasticité de la demande (p.95)

Résumé (p.107)
Exercices suggérés (p.108)

6.1 – Les dérivées d'ordre supérieur

Soit $y = f(x)$ une fonction. La dérivée

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

est aussi une fonction, qu'on peut dériver de nouveau.

La **seconde dérivée** de $f(x)$, ou dérivée du **deuxième ordre**, est:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \left(f'\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

La seconde dérivée calcule la pente de la droite tangente à la courbe de la fonction dérivée.

En général, il existe des dérivées de tout ordre n, que l'on dénote par $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ ou $f^{(n)}(x)$, ou encore à l'aide de chiffres romains $f^{\mathsf{VII}}(x)$, etc.

Exemples:

1. Calculer toutes les dérivées de $f(x) = x^3$.

2. Soit $m^2 + n^2 = 4$. Calculer $\frac{d^2m}{dn^2}$ et $\frac{d^2n}{dm^2}$.

Solutions:

1. C'est un polynôme, dont les dérivées sont

$$\begin{aligned} f^{\mathsf{I}}(x) &= 3x^{3-1} = 3x^2 \\ f^{\mathsf{II}}(x) &= 3(2)x^{2-1} = 6x \\ f^{\mathsf{III}}(x) &= 6 \\ f^{\mathsf{IV}}(x) &= 0 \\ f^{\mathsf{V}}(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   À partir de la quatrième dérivée, toutes les dérivées subséquentes sont nulles.

2. Commençons par calculer $\frac{dm}{dn}$ et $\frac{dn}{dm}$. En dérivant l'équation par n et m, nous obtenons respectivement

$$2m\frac{dm}{dn} + 2n = 0 \quad \text{et} \quad 2m + 2n\frac{dn}{dm} = 0,$$

d'où

$$\frac{dm}{dn} = -\frac{n}{m} \quad \text{et} \quad \frac{dn}{dm} = -\frac{m}{n}.$$

On dérive la première par n et la second par m:

$$\frac{d^2m}{dn^2} = -\frac{\frac{dn}{dn}m - n\frac{dm}{dn}}{m^2} = -\frac{m - n\frac{dm}{dn}}{m^2} = -\frac{m + \frac{n^2}{m}}{m^2} = -\frac{m^2 + n^2}{m^3},$$

et

$$\frac{d^2n}{dm^2} = -\frac{\frac{dm}{dm}n - m\frac{dn}{dm}}{n^2} = -\frac{n - m\frac{dn}{dm}}{n^2} = -\frac{n + \frac{m^2}{n}}{n^2} = -\frac{m^2+n^2}{n^3}.$$

Mais $m^2 + n^2 = 4$ (dans ce problème), alors

$$\frac{d^2m}{dn^2} = -\frac{m^2+n^2}{m^3} = -\frac{4}{m^3} \quad \text{et} \quad \frac{d^2n}{dm^2} = -\frac{m^2+n^2}{n^3} = -\frac{4}{n^3}.$$

⚠ Lorsqu'on utilise la dérivée implicite, on doit souvent utiliser la relation originale entre les variables afin de simplifier les expressions des dérivées d'ordre supérieur.

Mais cela ne fonctionne pas toujours comme on s'y attend...

L'accélération

La première dérivée du déplacement correspond à la vitesse. Qu'en est-il de sa dérivée seconde?

Exemple: au chapitre 2, on vous propose un fou dans sa montgolfière qui laisse tomber des boules de quilles qui parcourent

$$s(t) = 6t^2 \text{ m après } t \text{ sec;}$$

la vitesse de la boule de quille après t secondes est alors

$$v(t) = s'(t) = 6(2)t^{2-1} = 12t \text{ m/sec.}$$

La boule se déplace plus rapidement après 2 secondes qu'après 1 seconde en raison de la force gravitationnelle exercée par la Terre.

Le taux de variation de la vitesse est l'**accéleration**; on le dénote par $a(t)$ et on la mesure m/sec^2. L'accélération est donc la **dérivée de la vitesse** et la **seconde dérivée du déplacement**.

Dans cet exemple, l'accélération de la boule est constante:

$$a(t) = 12 \text{ m/sec}^2.$$

Dans un problème de "chute libre," l'accélération est toujours constante.

⚠ En réalité, l'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la Terre est de 9.8m/sec^2 – le modèle de l'exemple n'offre qu'une approximation grossière de la réalité.

En résumé,

$$a(t) = v'(t) = s''(t), \quad v(t) = s'(t), \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Exemples:

1. Supposons qu'un objet se déplace selon

$$s = \frac{t}{t^2 + 5}$$

lorsque $t \geq 0$. À quel instant est-ce que l'objet revient sur ses pas? Quelle est sa position à ce moment? Son accélération?

Solution: À l'instant où l'objet revient sur ses pas, on a $v = 0$.

Mais ce n'est pas une condition suffisante $\Longrightarrow$ $v = 0$ ne garantit pas que l'objet se retourne, mais seulement qu'il s'arrête.

Pour qu'il se retourne, sa vitesse doit subir un changement de signe; c'est-à-dire qu'il doit être en transition entre s'en aller (vitesse positive) et revenir (vitesse négative), ou vice-versa.

D'après la définition de la vitesse, nous obtenons

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{(t^2+5) - t(2t)}{(t^2+5)^2} = \frac{5 - t^2}{(t^2+5)^2}.$$

On voit que $v(t) = 0$ lorsque $5 - t^2 = 0 \implies t = \pm\sqrt{5}$; puisque $t \geq 0$, on élimine $t = -\sqrt{5}$.

Il ne reste qu'à vérifier que la vitesse change effectivement de signe lorsque $t = \sqrt{5}$:

$$0 \leq t < \sqrt{5} \Longleftrightarrow t^2 < 5 \Longleftrightarrow 0 < 5 - t^2 \Longleftrightarrow 0 < \frac{5 - t^2}{(t^2+5)^2} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{5} < t \Longleftrightarrow 5 < t^2 \Longleftrightarrow 5 - t^2 < 0 \Longleftrightarrow \frac{5 - t^2}{(t^2+5)^2} < 0.$$

L'objet revient donc sur ses pas à cet instant. Notez que

$$a(t) = v'(t) = \frac{(5-t^2)'(t^2+5)^2 - (5-t^2)\left((t^2+5)^2\right)'}{\left((t^2+5)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2t(t^2+5)^2 - (5-t^2)2(t^2+5)(2t)}{(t^2+5)^4} = \frac{2t(t^2-15)}{(t^2+5)^3}.$$

Alors

$$s(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad a(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}((\sqrt{5})^2 - 15)}{((\sqrt{5}^2 + 5)^3} = -\frac{\sqrt{5}}{50}.$$

2. Supposons qu'un palmier et un kangourou se déplacent en ligne droite selon $s_1(t) = 4t - t^2$ et $s_2(t) = 6t^2 - t^3$, respectivement. Quelles sont les vitesses respectives lorsque les accélérations sont identiques?

Alors

$$s(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad a(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}((\sqrt{5})^2 - 15)}{((\sqrt{5}^2 + 5)^3} = -\frac{\sqrt{5}}{50}.$$

2. Supposons qu'un palmier et un kangourou se déplacent en ligne droite selon $s_1(t) = 4t - t^2$ et $s_2(t) = 6t^2 - t^3$, respectivement. Quelles sont les vitesses respectives lorsque les accélérations sont identiques?

   Solution: Il faut trouver les accélérations. Notez que

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 4t - t^2 & s_2(t) &= 6t^2 - t^3 \\ v_1(t) &= s_1'(t) = 4 - 2t & v_2(t) &= s_2'(t) = 12t - 3t^2 \\ a_1(t) &= v_1'(t) = -2 & a_2(t) &= v_2'(t) = 12 - 6t. \end{aligned}$$

Les accélérations sont égales lorsque

$$a_1(t) = a_2(t) \implies -2 = 12 - 6t \implies t = \frac{7}{3}.$$

Nous obtenons alors

$$v_1(7/3) = 4-2(7/3) = -2/3 \quad \text{et} \quad v_2(7/3) = 12(7/3)-3(7/3)^2 = 35/3.$$

On remarque que les deux objets se dirigent donc des directions opposées à cet instant puisque les signes des vitesses sont différents.

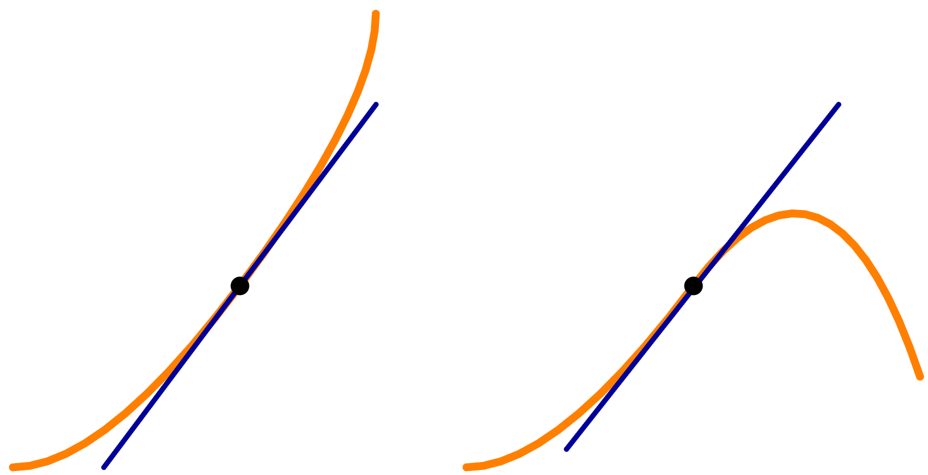
⚠ La troisième dérivée du déplacement s'appelle l'**à-coup** ("jolt"), la quatrième dérivée, le **snap**. Leurs applications sont limitées.

6.2 – L'optimisation d'une fonction

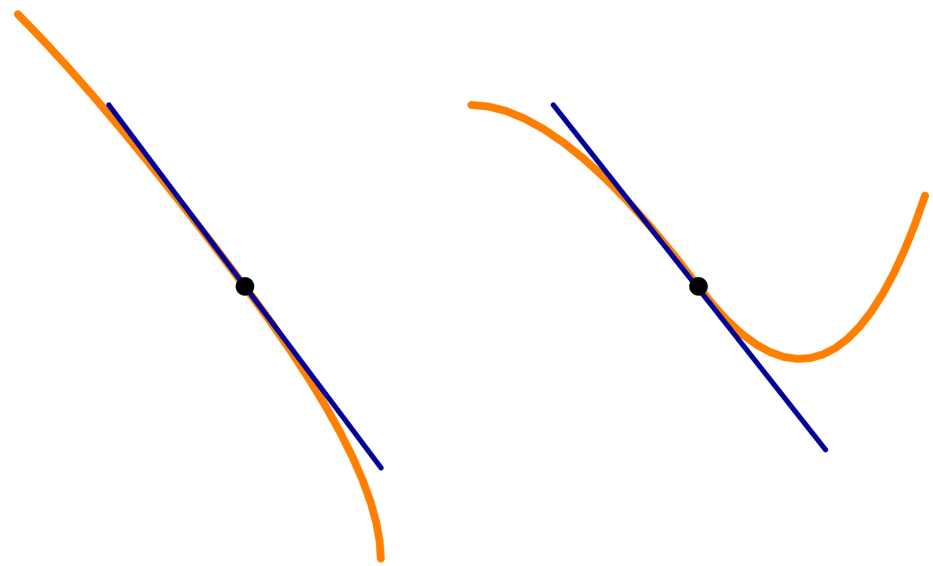
L'optimisation est sans doute l'application la plus commune de la dérivée.

Soit $y = f(x)$ une courbe et $x = a$.

Si $f'(a) > 0$, alors $f(x)$ est **croissante** $(\nearrow)$ près de $x = a$.



Si $f'(a) < 0$, alors $f(x)$ est **décroissante** ($\searrow$) près de $x = a$.



Que ce passe-t-il si $f'(a) = 0$?

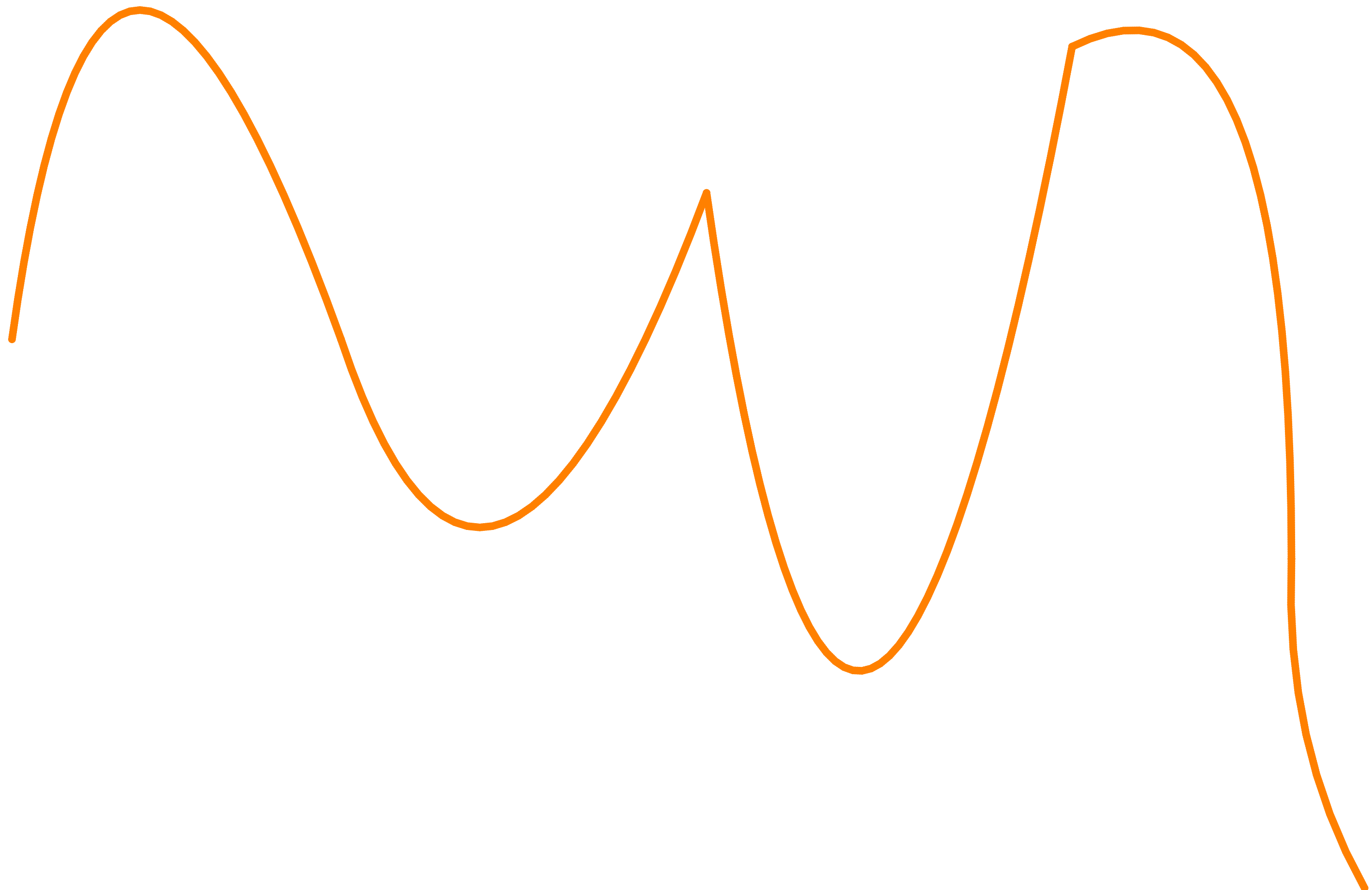
La fonction possède alors une droite tangente **horizontale**.

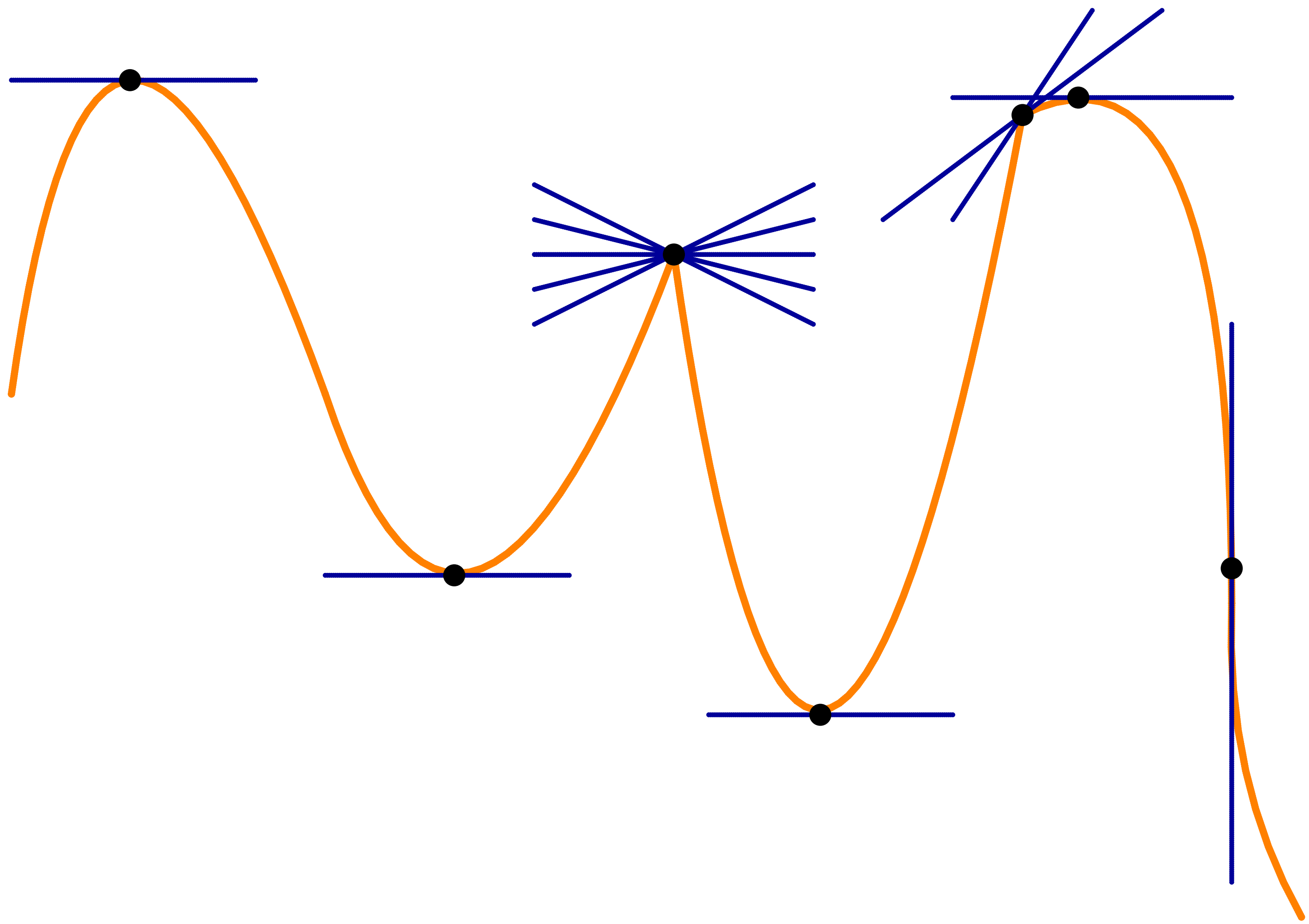
Les points où la fonction passe de $\nearrow$ à $\searrow$, ou vice-versa, sont les **extréma locaux** de la fonction: on a un

- **maximum local** lorsque la fonction passe de $\nearrow$ à $\searrow$;
- **minimum local** lorsque la fonction passe de $\searrow$ à $\nearrow$.

Ceci peut se produire de deux façons:

1. $f'(x) = 0 \implies$ la pente de la droite tangente est nulle;
2. $f'(x)$ n'existe pas $\implies$ la pente de la droite tangente est indéfinie.





Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet un **extrémum local** (une valeur maximale ou minimale) l'atteint à l'un de ces points.

Les valeurs $x \in D_f$ où $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas sont les **points critiques** de la fonction. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, il faut inclure les bornes lors de la recherche d'**extréma globaux**.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On obtient la valeur maximale et la valeur minimale globale de f à l'aide de la méthode suivante:

1. Trouver les points critiques de f dans $[a, b]$.
2. Évaluer f en $x = a$ et $x = b$, ainsi qu'aux points critiques trouvés en 1.
3. La plus grande (petite) valeur obtenue en 2 est le maximum (minimum) global de f.

Exemples: trouver les extréma globaux des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $0 \leq x \leq 2$.

2. $g(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$, $0 \leq x$.

Exemples: trouver les extréma globaux des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $0 \leq x \leq 2$.

2. $g(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$, $0 \leq x$.

Solutions: il suffit d'utiliser la marche à suivre.

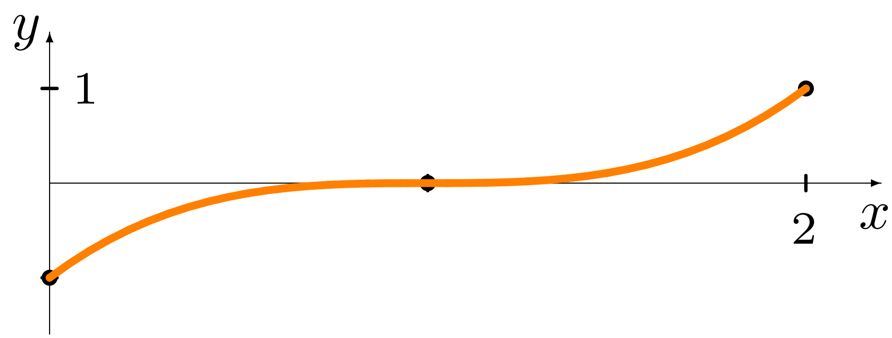
1. On a $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$. Puisque $f'(x)$ est un polynôme, $f'(x)$ existe pour tout x. Les points critiques sont:

$$f'(x) = 0 \implies 3(x-1)^2 = 0 \implies x = 1.$$

   En ajoutant les bornes $a = 0$ et $b = 2$, nous obtenons le tableau suivant:

x	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1

- $x = 2 \implies y = 1$ est le maximum global;
- $x = 0 \implies y = -1$ est le minimum global.



2. Puisque

$$g'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 5\left(x^{2/3} - \frac{2}{x^{1/3}}\right),$$

alors $g'(x)$ n'existe pas lorsque $x = 0$ et $g'(x) = 0$ lorsque

$$5\left(x^{2/3} - \frac{2}{x^{1/3}}\right) = 0 \implies x^{2/3} = \frac{2}{x^{1/3}} \implies x = 2.$$

On a deux points critiques: $x = 0$ et $x = 2$.

⚠ **On ne peut pas se servir de la marche à suivre puisqu'il n'y a pas de borne supérieure b $(=\infty)$.**

Mais nous savons qu'il peut y avoir des **extréma locaux** en $x = 0, 2$.

Le tableau suivant nous permet de les identifier.

	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$g'(x)$	n'existe pas	$-$	0	$+$
$g(x)$				

Mais nous savons qu'il peut y avoir des **extréma locaux** en $x = 0, 2$.

Le tableau suivant nous permet de les identifier.

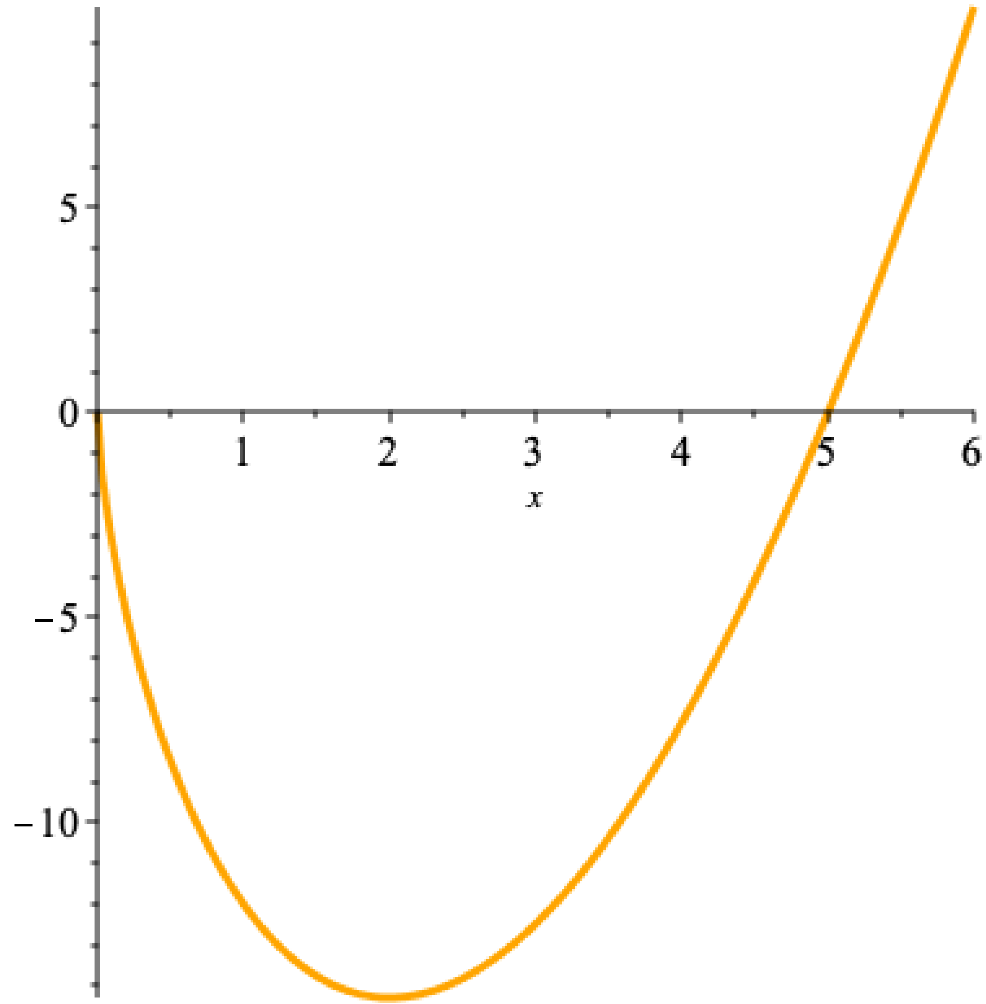
	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$g'(x)$	n'existe pas	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	min. local	$\nearrow$

Puisque $g'(x)$ passe de $\searrow$ à $\nearrow$ lorsque $x = 2$, la fonction g possède un minimum local à cet endroit.

Remarque: c'est pourtant un minimum global. En effet, $g \searrow$ sur $(0, 2) \implies g(x) \geq g(2)$ sur $(0, 2)$.

De plus, $g \nearrow$ sur $(2, \infty) \implies g(x) \geq g(2)$ sur $(2, \infty)$.

En somme, $g(x) \geq g(2)$ pour tout $x > 0 \implies g$ possède un minimum global en $x = 2$.


5
0
−5
−10
1
2
3
4
5
6
x

La marche à suivre

Les problèmes d'optimisation ne sont pas toujours présentés de façon si évidente. Pour résoudre de tels problèmes, on suit les étapes suivantes.

1. Faire un diagramme (s'il est possible de le faire).

2. Introduire n variables pour représenter les quantités, ainsi que les bornes inférieures et supérieures de ces variables.

3. Touver $n-1$ équations reliant ces variables.

4. Exprimer $n-1$ des variables en fonction de celle qui reste, en se servant des $n-1$ équations obtenues en 3.

5. Introduire la quantité à maximiser/minimiser.
6. Exprimer cette quantité à l'aide d'une seule variable.
7. Trouver les points critiques de la quantité à maximiser/minimiser se retrouvant entre les bornes.
8. Établir une liste de candidats (points critiques entre les bornes + bornes).
9. Évaluer la fonction à chacun des points dans la liste.
10. Répondre à la question.

Exemples:

1. Une fermière désire construire un enclos rectangulaire dans l'un de ses prés pour éviter que les lamas qui y broûtent ne se sauvent.

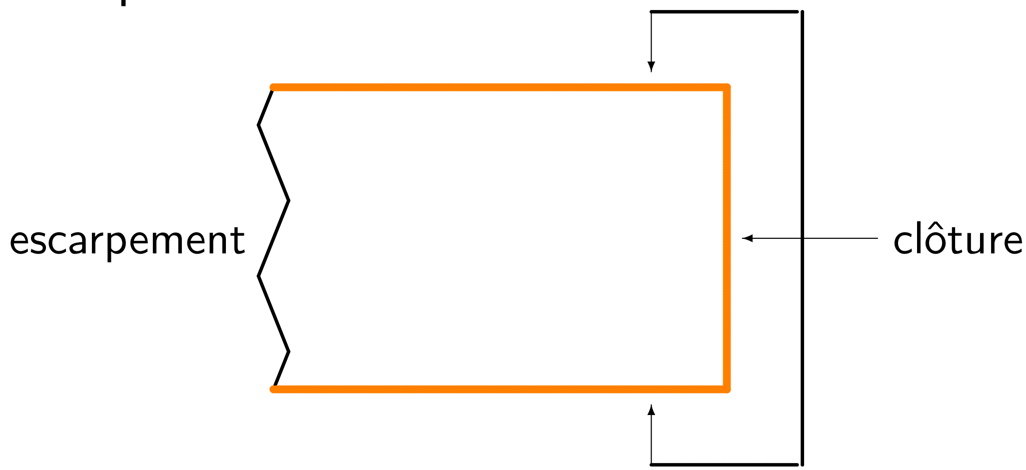
   Elle dispose de 2000m de clôture. Elle aimerait que l'un des côtés de l'enclos se retrouve au bas d'un escarpement (c'est-à-dire qu'elle n'y placera pas de clôture).

   Pour le comfort des bêtes, elle aimerait de plus que chacun des côtés de l'enclos mesure au moins 10m.

   Quelle est l'aire maximale de l'enclos qu'elle puisse construire?

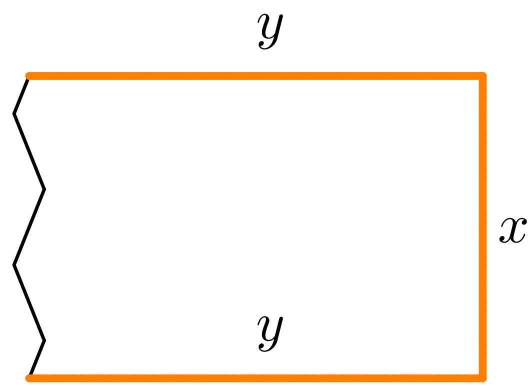
   Solution: on utilise les 10 étapes de la marche à suivre.

1. La situation est représentée ci-dessous:



2. Les quantités qui peuvent changer dans ce problème sont les dimensions de l'enclos, son périmètre et sa superficie: soient x, y la longeur (en m) du côté formé par l'escarpement et par un des côtés perpendiculaire, L le périmètre, et A la superficie.

   Physiquement on doit avoir $x, y \geq 0$; l'énoncé demande $x, y \geq 10$.



3. la longueur totale des côtés clôturés est $L = x + y + y = x + 2y$.

   La fermière dispose de 2000m de clôture: $x + 2y = 2000$. Mais

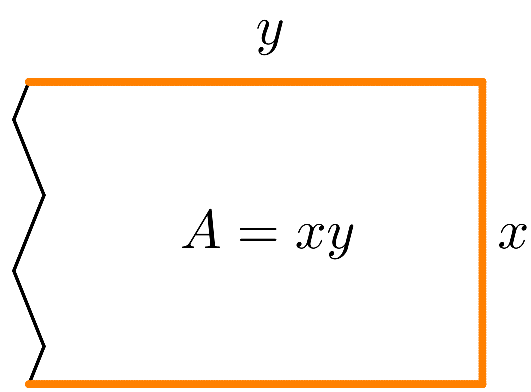
   $x \geq 10 \implies 2000 = x + 2y \geq 10 + 2y \implies 2y \leq 1990 \implies y \leq 995;$

   $y \geq 10 \implies 2000 = x + 2y \geq x + 2(10) \implies x \leq 1980 \implies x \leq 1980.$

4. Puisque $x + 2y = 2000$, il est possible d'isoler $x = 2000 - 2y$.

   (On aurait aussi pu isoler $y = 1000 - \frac{x}{2}$, c'est au choix.)

5. La superficie de l'enclos (à maximiser) rectangulaire est $A = xy$.



6. Puisque x peut être exprimé en termes de y, la superficie devient

$$A = A(y) = xy = (2000 - 2y)y = 2000y - 2y^2, \quad 10 \leq y \leq 995.$$

7. La dérivée de $A(y)$ est $A'(y) = 2000 - 4y$. Les points critiques de A sont donc les points où

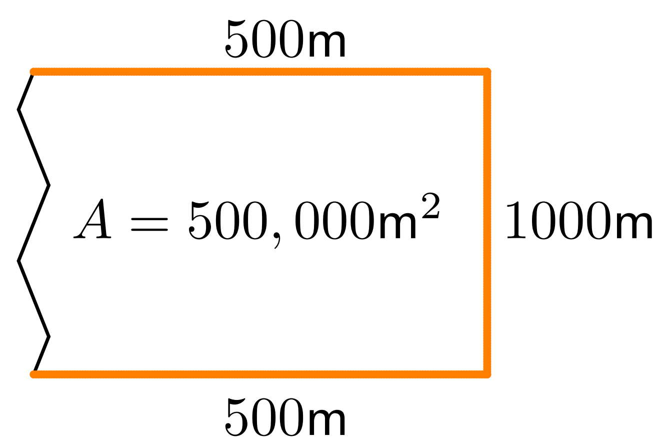
$$2000 - 4y = 0 \implies y = 500.$$

8. L'aire maximale sera alors atteinte dans un des cas suivants: lorsque $y = 10$ ou $y = 995$, ou lorsque $y = 500$.

9. Nous obtenons le tableau suivant:

y	10	500	995
$A(y)$	$19,800$	$500,000$	9950

10. L'aire maximale de l'enclos est donc de $500,000$m^2, ou 0.5km^2.



⚠ **Le but de la marche à suivre est simple – on cherche à traduire l'énoncé et à produire un problème qui se traîte facilement à l'aide du calcul différentiel.**

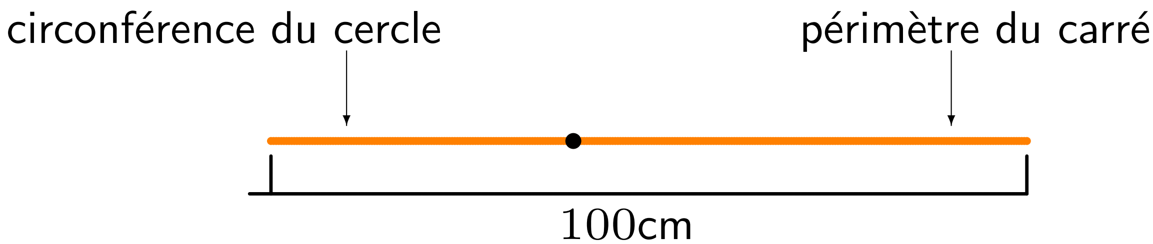
2. On utilise un ceintre de métal afin de construire un mobile pour bébé. En "dépliant" le ceintre, on obtient une tige de métal de 1m de longueur. Cette tige est ensuite coupée en deux: la première partie est tordue pour former la circonférence d'un cercle, la seconde pour former un carré. Ensuite, on utilise des feuilles de carton afin de couvrir les formes.

   Les experts suggèrent que le périmètre de chaque composante devrait mesurer au moins 15cm pour que le bébé puisse bien distinguer les composantes du mobile.

   Supposons qu'un ceintre coûte $1.92\$$ et qu'une feuille de carton de 500cm^2 coûte $1.00\$$. Quel est le coût minimal de fabrication d'un mobile?

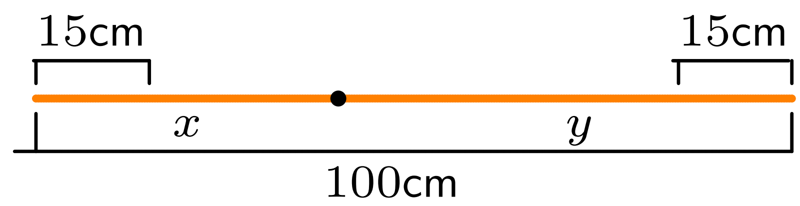
Solution: on utilise les 10 étapes de la marche à suivre.

1. La situation est représentée ci-dessous:



2. Les quantités qui changent dans le problème sont la longueur de la première partie, x, qui correspond à la circonférence du cercle, et la longueur de la seconde partie, y, qui correspond au périmètre du carré. La superficie totale des 2 composantes varie également, mais la taille du ceintre est fixe.

   De plus, les contraintes physiques du problème imposent $x, y \geq 15$.



3. La somme $x + y = 100$ représente la longueur totale de la tige formée par le ceintre déplié. Mais

$$x \geq 15 \implies 100 = x + y \geq 15 + y \implies y \leq 85;$$
$$y \geq 15 \implies 100 = x + y \geq x + 15 \implies x \leq 85.$$

4. Puisque $x + y = 100$, il est possible d'isoler y et d'obtenir $y = 100 - x$.

5. Soient r le rayon du cercle et a le côté du carré:

$$C_{\bigcirc} = 2\pi r = x \implies r = \frac{x}{2\pi} \quad \text{et} \quad P_{\square} = 4a = y \implies a = \frac{y}{4}.$$

La superficie du cercle et celle du carré sont:

$$A_{\bigcirc} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} \quad \text{et} \quad A_{\square} = a^2 = \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{16},$$

et la superficie totale des deux composantes est

$$A = A_{\bigcirc} + A_{\square} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16}.$$

C'est cette superficie qui doit être recouverte à l'aide du carton, qui coûte $1.00\$/500\text{cm}^2 \implies 1\text{cm}^2$ revient à $0.002\$$. Le coût de carton requis est alors $0.002A$.

Il faut aussi acheter un ceintre à $1.92\$$; le coût de fabrication d'un mobile revient à

$$F = 1.92 + 0.002\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16}\right).$$

6. Puisque $y = 100 - x$, le coût de fabrication est donné par

$$F = F(x) = 1.92 + 0.002\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{(100-x)^2}{16}\right), \quad 15 \leq x \leq 85.$$

7. La dérivée de $F(x)$ est $F'(x) = 0.002\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{100-x}{8}\right)$. Les points critiques de F sont donc les points où

$$\frac{x}{2\pi} - \frac{100-x}{8} = 0 \implies x = \frac{100\pi}{4+\pi}.$$

8. Le coût minimal de fabrication sera atteint dans un des cas suivants: lorsque $x = 15$ ou $x = 85$, ou lorsque $x = \frac{100\pi}{4+\pi}$.

9. Nous obtenons le tableau suivant:

x	15	$100\pi/(4+\pi)$	85
$F(x)$	≈ 2.86	≈ 2.62	≈ 3.09

10. Le coût de fabrication minimal d'un mobile est $\approx 2.62\$$ ($x \approx 43.99$cm).

3. Une somme de 1200$ est investie dans un fond mutuel à risque élevé.

   Pendant les trois premières années, la valeur de l'investissement est

$$V(t) = 1000\left((t-\sqrt{2})^2 - 1\right)^{2/3} + 200.$$

   À quel instant la valeur de l'investissement est-elle minimale? Maximale?

3. Une somme de 1200$ est investie dans un fond mutuel à risque élevé.

   Pendant les trois premières années, la valeur de l'investissement est

$$V(t) = 1000\left((t-\sqrt{2})^2-1\right)^{2/3} + 200.$$

   À quel instant la valeur de l'investissement est-elle minimale? Maximale?

   Solution: on minimise/maximise $V(t)$ sur $[0,3]$; sa dérivée est

$$V'(t) = \frac{4000(t-\sqrt{2})}{3\left((t-\sqrt{2})^2-1\right)^{1/3}}.$$

Les points critiques de V sont les instants du domaine où $V'(t) = 0$ (numérateur$= 0$) et où $V'(t)$ n'est pas définie (dénominateur$= 0$).

Dans le premier cas,

$$t - \sqrt{2} = 0 \implies t = \sqrt{2}.$$

Dans le second,

$$(t-\sqrt{2})^2 - 1 = 0 \implies (t-\sqrt{2})^2 = 1 \implies t-\sqrt{2} = \pm 1 \implies t = \sqrt{2} \pm 1.$$

Il y a donc trois points critiques: $t = \sqrt{2} - 1$, $t = \sqrt{2}$ et $t = \sqrt{2} + 1$. Les valeur extrêmes de V sont donc atteintes en un des 5 points suivants:

$$t = 0, \quad t = \sqrt{2} - 1, \quad t = \sqrt{2}, \quad t = \sqrt{2} + 1, \quad t = 3.$$

L'investissement prend en ces points les valeurs suivantes:

t	0	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$	3
$V(t)$	1200	200	1200	200	≈ 1518.93

Sur la période des trois premières années, l'investissement atteint sa valeur maximale après 3 ans, et sa valeur minimale en deux instants distincts, soient $\sqrt{2}-1 \approx 0.414$ et $\sqrt{2}+1 \approx 2.414$ ans.

4. Que peut être le plus petit produit de deux nombres dont la somme est 25?

L'investissement prend en ces points les valeurs suivantes:

t	0	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$	3
$V(t)$	1200	200	1200	200	≈ 1518.93

Sur la période des trois premières années, l'investissement atteint sa valeur maximale après 3 ans, et sa valeur minimale en deux instants distincts, soient $\sqrt{2}-1 \approx 0.414$ et $\sqrt{2}+1 \approx 2.414$ ans.

4. Que peut être le plus petit produit de deux nombres dont la somme est 25?

Solution: soient x et y les deux nombres; on doit avoir $x+y=25$. Il n'y a pas de restrictions sur les valeurs de x et y.

Le produit de ces deux nombres est $P = xy$. On note que $y = 25 - x$.

Alors

$$P = P(x) = xy = x(25 - x) = 25x - x^2 \quad \text{et} \quad P'(x) = 25 - 2x.$$

Le produit n'admet qu'un point critique, en $x = 12.5$. Mais on ne peut utiliser la méthode présentée au préalable puisque x n'est pas borné.

	$x < 12.5$	$x = 12.5$	$x > 12.5$
$P'(x)$	$+$	0	$-$
$P(x)$	$\nearrow$	max. local	$\searrow$

Il n'y a pas de minimum global!

6.3 – L'étude d'une fonction

Dans plusieurs cas, il peut être avantageux de tracer le graphique d'une fonction dont nous cherchons les points critiques ou les extréma.

L'information pertinente comprend:

- les asymptotes verticales et horizontales;
- les intervalles de croissance, et
- les intervalles de concavité,

que l'on obtient par l'entremise de dérivées d'ordre 0, 1, et 2.

Les asymptotes verticales

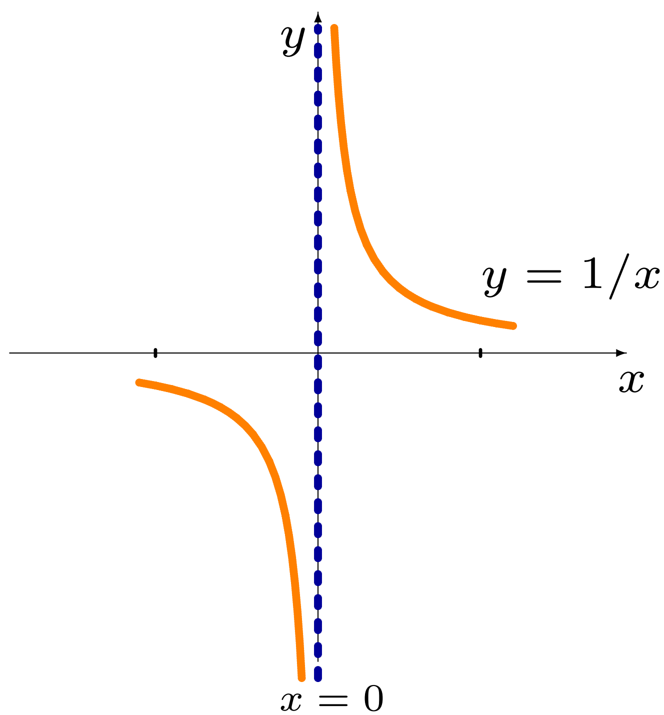
Le domaine de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. C'est une fonction continue, alors $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ si $a \neq 0$. Que se passe-t-il à $a = 0$?

On évalue la limite en calculant les limites à gauche et à droite:

x	$1/x$	x	$1/x$
-1	-1	1	1
-0.1	-10	0.1	10
-0.01	-100	0.01	100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	$?$	0	$?$

La limite n'existe pas: les valeurs de $\frac{1}{x}$ augmentent sans borne lorsque $x \to 0^+$, et elles diminuent sans borne lorsque $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$



La courbe ne touche pas la droite $x = 0$ (l'axe des y) puisque la fonction n'est pas définie en $x = 0$: c'est une **asymptote verticale** de $f(x) = \frac{1}{x}$.

En général, la fonction f possède une asymptote verticale en $x = a$ si (au moins) une des quatre relations suivantes est vérifiée:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

⚠ Une fonction possède souvent une asymptote verticale là où son dénominateur est nul, **mais ce n'est pas toujours le cas** – faîtes attention aux quotients indéterminés de la forme $\frac{0}{0}$!

⚠ **Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres: on ne s'en sert que pour décrire le comportement de la fonction.**

Il est possible d'effectuer un certain type d'arithmétique avec ces symboles. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les relations suivantes sont valides:

$$a + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) - a = \pm\infty, \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty, \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \qquad a\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}, \qquad \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Les expressions suivantes sont **indéterminées** (il faut essayer une autre approche!):

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}, \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Exemples: trouver les asymptotes verticales des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3-x}{x}$.

Solutions: on trouve les endroits où le dénominateur de la fonctions est nul, puis on calcule les limites à droite et à gauche à ces endroits.

1. Dénominateur $= 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1.$ Mais

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

   La fonction possède une asymptote verticale en $x = 1$.

2. Dénominateur $= 0 \implies x^2 = 0 \implies x = 0.$ Mais

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

   La fonction possède une asymptote verticale en $x = 0$.

3. $x^2+x-2=0 \implies (x-1)(x+2)=0 \implies x=1,-2.$ Mais

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\right)\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}\cdot(-\infty)=-\infty.$$

De même, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2+x-2}=+\infty$. On a aussi

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\left(\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x-1}\right)\left(\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\cdot(-\infty)=+\infty.$$

De même, $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2+x-2} = -\infty$.

La fonction possède des asymptotes verticales en $x=1$ et $x=-2$.

4. $x^2+x-2=0 \implies (x-1)(x+2)=0 \implies x=1,-2$. Mais

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

De même, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}$. On a aussi

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \left(\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2}\right) = -\infty.$$

De même, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = +\infty.$

La fonction ne possède une asymptote qu'en $x = -2$.

5. Dénominateur $= 0 \implies x = 0$. Mais

$$f(x) = \frac{3-x}{x} = \frac{3}{x} - 1 = 3\left(\frac{1}{x}\right) - 1, \quad \text{lorsque } x \neq 0;$$

$\frac{1}{x}$ possède une asymptote verticale en $x = 0 \implies$ aussi le cas pour $f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3-x}{x} = 3\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}\right) - 1 = 3 \cdot (-\infty) - 1 = -\infty.$$

Les asymptotes horizontales

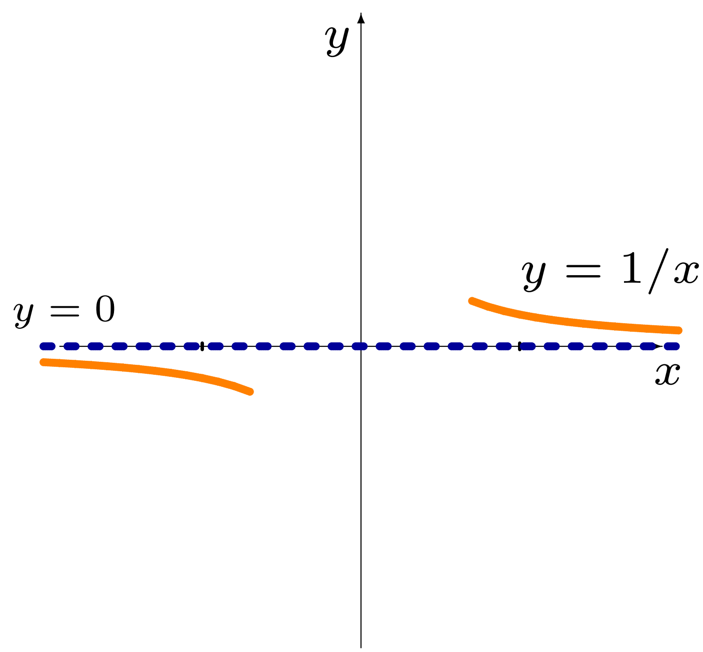
Les **asymptotes horizontales** sont reliées au comportement **éventuel**.

Quel est le comportement éventuel de $f(x) = \frac{1}{x}$? On le détermine à l'aide de limites $x \to \pm\infty$.

x	$1/x$	x	$1/x$
-1	-1	1	1
-10	-0.1	10	0.1
-100	-0.01	100	0.01
-1000	-0.001	1000	0.001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	0	$+\infty$	0

Lorsque $x \to +\infty$, les valeurs de $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 (par le haut); lorsque $x \to -\infty$, $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 (par le bas):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$$



Dans ce cas, la droite $y = 0$ (l'axe des x) est une **asymptote horizontale** de $f(x) = \frac{1}{x}$.

En général, la fonction f possède une asymptote horizontale en $y = L$ si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

⚠ **Une fonction possède au plus 2 asymptotes horizontales:** une dans chaque direction ($x \to \pm\infty$). Elle peut aussi n'en posséder aucune (i.e. $f(x) = x$), ou n'en posséder qu'une seule (i.e. $f(x) = 1/x$).

⚠ Le graphique de la fonction **peut couper une asymptote horizontale** à plusieurs reprise (en contraste aux asymptotes verticales).

⚠ On évalue souvent les asymptotes horizontales en remplaçant la variable par $\pm\infty$ – **faîtes attention aux formes indéterminés $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $+\infty - \infty$!**

Exemples: trouver les asymptotes horizontales des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+x-2}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Solutions: on évalue les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

1. Puisque
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\pm\infty-1}=\frac{1}{\pm\infty}=0,$$
la fonction ne possède qu'une unique asymptote horizontale en $y=0$.

2. Puisque
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(\pm\infty)^2}=\frac{1}{+\infty}=0,$$
la fonction ne possède qu'une unique asymptote horizontale en $y=0$.

3. Puisque
$$\lim_{x\to\pm\infty}x^2=(+\infty)^2=+\infty,$$
la fonction ne possède pas d'asymptote horizontale.

4. En substituant directement, nous obtenons

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{+\infty-1}{+\infty+(-\infty)-2} =???$$

C'est une forme indéterminée $\infty - \infty$. On remarque que

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}, \quad \text{lorsque } x \neq 0, \text{ et}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{2-\lim\frac{1}{x^2}}{1+\lim\frac{1}{x}-\lim\frac{2}{x^2}} = \frac{2-0}{1+0-2\cdot 0} = 2.$$

La fonction ne possède qu'une unique asymptote horizontale en $y = 2$.

5. En substituant directement, nous obtenons

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|+1} = \frac{\pm\infty}{+\infty+1} = \frac{\pm\infty}{+\infty} = ???$$

C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On remarque que

$$\frac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Lorsque $x \to -\infty$, $x \leq 0$. De même, lorsque $x \to +\infty$, $x \geq 0$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(-1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{-1+0}=-1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{1+0}=1.$$

La fonction possède des asymptotes horizontales en $y=-1$ et $y=1$.

Si $f(x)$ est une fonction rationnelle, c'est à dire qu'elle est définie par

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

il est facile de trouver ses asymptotes verticales et horizontales:

1. on factorise le numérateur et le dénominateur et on simplifie;

2. f possède une asymptote verticale à tous les endroits où le dénominateur de la fonction simplifiée est nul;

3. si $n > m$, il n'y a pas d'asymptote horizontale; si $n = m$, f possède une asymptote horizontale en $y = \frac{a_n}{b_m}$; si $n < m$, f possède une asymptote horizontale en $y = 0$.

Exemples: trouver les asymptotes verticales et horizontales des fonctions rationnelles suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-3x+2}$.

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-2x}{x^2-2x+1}$.

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$.

4. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$.

Solutions: on utilise la marche à suivre pour les fonctions rationnelles.

1. Le numérateur $p(x)$ ne se factorise pas, tandis que le dénominateur $q(x)$ devient $(x-1)(x-2)$. La fonction ne se simplifie pas. Ainsi, f possède des asymptotes verticales en $x=1$ et $x=2$. De plus,

$$\deg p(x) = n = 2 = \deg q(x) = m = 2;$$

   la droite $y = \frac{a_2}{b_2} = \frac{3}{1} = 3$ est la seule asymptote horizontale de f.

2. Le numérateur $p(x)$ est déjà factorisé, tandis que le dénominateur $q(x)$ devient $(x-1)^2$. La fonction ne se simplifie pas. Ainsi, f possède une asymptote verticale en $x=1$. De plus,

$$\deg p(x) = n = 1 < \deg q(x) = m = 2;$$

   la droite $y=0$ est la seule asymptote horizontale de g.

3. Le numérateur $p(x)$ devient $x(x^2-1)$, et la fonction se simplifie pour devenir $g(x)=x$, tant que $x\neq -1,1$. Ainsi, h ne possède pas d'asymptote verticale (il y a des trous lorsque $x=-1,1$). De plus,

$$\deg p(x)=n=3>\deg q(x)=m=2;$$

h ne possède pas d'asymptote horizontale.

4. Le numérateur et le dénominateur ne se factorisent pas; la fonction ne se simplifie pas. Le dénominateur n'est jamais nul; la fonction k ne possède pas donc pas d'asymptote verticale. De plus,

$$\deg p(x)=n=3<\deg q(x)=m=4;$$

la droite $y=0$ est la seule asymptote horizontale de k.

Les intervalles de croissance

Soient $f(x)$ continue sur $[c, d]$ et différentiable sur $]c, d[$, et $x_0 \in]c, d[$:

- si $f'(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 sur lequel $f \nearrow$;
- si $f'(x_0) < 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant x_0 sur lequel $f \searrow$;
- autrement, x_0 est un point critique.

L'union de tous les intervalles où $f \nearrow$ $(f' > 0)$ forme les **intervalles de croissance** $(\mathrm{I.\,C.})$ de f; l'union de tous les intervalles où $f \searrow$ $(f' < 0)$ forme les **intervalles de décroissance** de f $(\mathrm{I.\,D.})$.

En général, on trouve $\mathrm{I.\,C.}$ et $\mathrm{I.\,D.}$ pour une fonction algébrique en trouvant ses points critiques et ses asymptotes verticales: chaque intervalle entre deux de ces points consécutifs est un intervalle de croissance ou un intervalle de décroissance.

Exemples: trouver $\mathrm{I.\,C.}$ et $\mathrm{I.\,D.}$ pour les fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Solutions:

1. On a $f'(x) = 2x - 2$:

   - $f \searrow \implies f'(x) < 0 \implies 2x - 2 < 0 \implies x < 1;$
   - $f \nearrow \implies f'(x) > 0 \implies 2x - 2 > 0 \implies x > 1.$

   Alors,
   $$\mathrm{I.\,D.} =]-\infty, 1[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.\,C.} =]1, +\infty[.$$
   Puisque la fonction passe de $\searrow$ à $\nearrow$ lorsque $x = 1$, f admet un minimum (local) en $x = 1$; c'est aussi un minimum global.

2. On a $f'(x) = 3x^2$:

   - $f \searrow \implies f'(x) < 0 \implies 3x^2 < 0 \implies x \in \varnothing;$
   - $f \nearrow \implies f'(x) > 0 \implies 3x^2 > 0 \implies x \neq 0.$

Alors,

$$\mathrm{I.\,C.} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.\,D.} = \varnothing.$$

Puisque la dérivée ne change pas de signe en $x = 0$, il n'y a pas de maximum ou de minimum (local ou global) à cet endroit.

3. Il y a une asymptote verticale en $x = 0$ (pourquoi?). De plus, on a

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}, \quad \text{d'où } f'(x) = 0 \implies x = \pm 1.$$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$		0		$\times$		0	
$f(x)$				A.V.			

Alors,

$$\mathrm{I.\,C.} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.\,D.} = \varnothing.$$

Puisque la dérivée ne change pas de signe en $x = 0$, il n'y a pas de maximum ou de minimum (local ou global) à cet endroit.

3. Il y a une asymptote verticale en $x = 0$ (pourquoi?). De plus, on a

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}, \quad \text{d'où } f'(x) = 0 \implies x = \pm 1.$$

4.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	A.V.	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Ainsi,

$$\mathrm{I.\,C.} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.\,D.} =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

On peut obtenir le signe de la dérivée dans le **tableau des signes** en raisonnant comme dans les deux premiers exemples, avec les inéquations.

On peut aussi l'obtenir en évaluant $f'(x)$ en un point représentatif de chaque intervalle, puisque la dérivée ne change pas de signe dans un tel intervalle; $f'(-2)$, $f'(-1/2)$, $f'(1/2)$, et $f'(2)$, mettons, dans le dernier exemple.

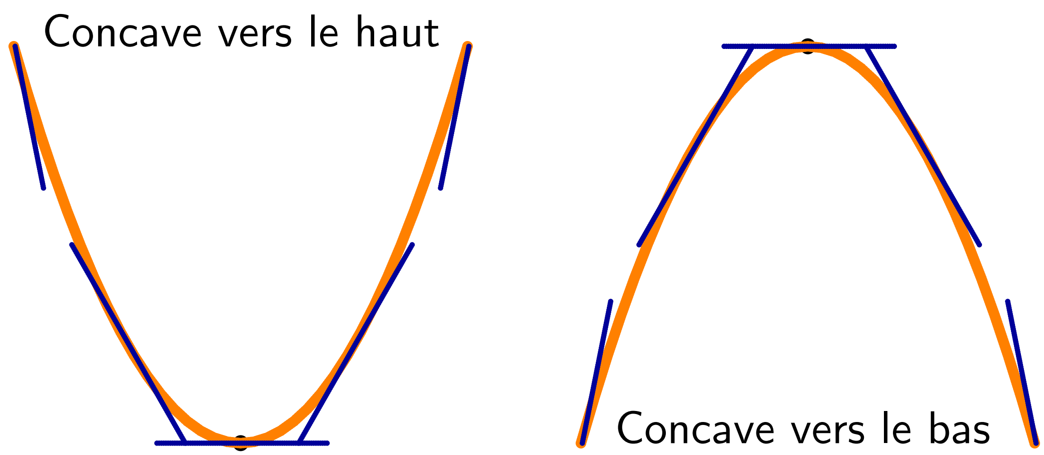
⚠ **Ce truc ne fonctionne que si $f(x)$ est continue sur les intervalles successifs entre les points repères (points critiques et asymptotes verticales)**.

Avec n **points repères**, il y a $n+1$ intervalles, et $n+1$ points représentatifs.

Les intervalles de concavité

Soit $y = f(x)$ une courbe et $x = a$.

Si $f''(a) > 0$, alors f est **concave vers le haut** ($\smile$) et $f' \nearrow$ près de a.
Si $f''(a) < 0$, alors f est **concave vers le bas** ($\frown$) et $f' \searrow$ près de a.



Une courbe est

- **concave vers le haut** si elle “s’ouvre vers le haut,” ou si la droite tangente à la courbe se retrouve sous la courbe;
- **concave vers le bas** si elle “s’ouvre vers le bas,” ou si la droite tangente à la courbe se retrouve en haut de la courbe.

Les points du domaine de f où la fonction change de concavité sont les **points d’inflexion**; pour que cela se produise, on doit avoir soit $f''(a) = 0$ ou soit $f''(a)$ n’existe pas.

⚠ **Ce n’est pas une condition suffisante. On peut avoir $f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ n’existe pas sans changement de concavité.**

Soient $f(x)$ continue sur $[c,d]$ et doublement différentiable sur $]c,d[$, et $x_0 \in]c,d[$:

- si $f''(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a,b]$ contenant x_0 sur lequel $f \smile$;
- si $f''(x_0) < 0$, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenant x_0 sur lequel $f \frown$;
- autrement, x_0 est **peut-être** un point d'inflexion.

L'union de tous les intervalles où $f \smile$ $(f'' > 0)$ forme les **intervalles de concavité positive** $(\mathrm{I.\,H.})$ de f; l'union de tous les intervalles où $f \frown$ $(f'' < 0)$ forme les **intervalles de concavité négative** de f $(\mathrm{I.\,B.})$.

On dénote l'ensemble des points de D_f où $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas par INFL_f.

En général, on trouve $\mathrm{I.\,H.}$ et $\mathrm{I.\,B.}$ pour une fonction algébrique en trouvant tous les points $x \in \mathrm{INFL}_f$ ou les points où f possède une asymptote verticale: chaque intervalle entre deux de ces points consécutifs est un intervalle de concavité positive ou un intervalle de concavité négative.

Exemples: trouver $\mathrm{I.\,C.}$ et $\mathrm{I.\,D.}$ pour les fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Solutions:

1. On a $f''(x) = 2$:

   - $f \frown \implies f''(x) < 0 \implies 2 < 0 \implies x \in \varnothing$;
   - $f \smile \implies f''(x) > 0 \implies 2 > 0 \implies x \in \mathbb{R}$.

   Alors,
   $$\mathrm{I.\,B.} = \varnothing \quad \text{et} \quad \mathrm{I.\,H.} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$
   Puisque la fonction ne change jamais de concavité, elle ne possède pas de point d'inflexion.

2. On a $f'(x) = 6x$:

   - $f \frown \implies f''(x) < 0 \implies 6x < 0 \implies x < 0$;
   - $f \smile \implies f''(x) > 0 \implies 6x > 0 \implies x > 0$.

Alors,

$$\mathrm{I.B.} =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.H.} =]0, +\infty[.$$

Puisque la dérivée seconde passe de $-$ à $+$ lorsque $x = 0$, il y a un point d'inflexion en $x = 0$.

3. Il y a une asymptote verticale en $x = 0$ (pourquoi?). De plus, on a $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \implies \mathrm{INFL}_f = \varnothing$.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f''(x)$		$\times$	
$f(x)$		A.V.	

Alors,

$$\mathrm{I.B.} =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \mathrm{I.H.} =]0, +\infty[.$$

Puisque la dérivée seconde passe de $-$ à $+$ lorsque $x = 0$, il y a un point d'inflexion en $x = 0$.

3. Il y a une asymptote verticale en $x = 0$ (pourquoi?). De plus, on a $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \implies \mathrm{INFL}_f = \varnothing$.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\frown$	A.V.	$\smile$

Ainsi, $\mathrm{I.B.} =]-\infty, 0[$ et $\mathrm{I.H.} =]0, +\infty[$.

⚠ **La concavité de la fonction change en $x = 0$, mais puisque $0 \notin \mathrm{INFL}_f$, ce n'est pas un point d'inflexion.**

On peut obtenir le signe de la dérivée dans le **tableau des signes** en raisonnant comme on le fait pour les intervalles de croissance.

On utilise parfois le test de la dérivée seconde afin de déterminer la nature d'un point critique.

Théorème: soit x_0 un point critique de f. Si $f''(x_0) > 0$, f atteint un minimum relatif en x_0; si $f''(x_0) < 0$, f atteint un maximum relatif en x_0.

⚠ **Si $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ n'existe pas, le test de la dérivée seconde ne peut être utilisé.**

La marche à suivre

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f'(a), f''(a) \neq 0$, le comportement de $f(x)$ près de a est donné par le tableau suivant:

$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$				

Nous sommes maintenant en mesure d'esquisser le graphique de toute fonction algébrique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la marche à suivre présentés aux pages suivantes.

⚠ **Le graphique sera nécessairement inexact, mais il préservera les particularités “essentielles” de la fonction.**

1. Déterminer le domaine de définition de f (endroits où f est définie).

2. Trouver les asymptotes verticales de la fonction (comportement lorsque f n'est pas définie).

3. Trouver les asymptotes horizontales de la fonction (comportement de f aux extrémités).

4. Trouver les zéros de la fonction et l'ordonnée à l'origine ($x = 0$ et $y = 0$, lorsqu'il est possible de le faire).

5. Trouver les points critiques ($f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas).

6. Trouver les "points d'inflexion" ($f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas).

7. Séparer l'ensemble des réels en intervalles à l'aide des points trouvés en 2, 5 et 6.

8. Créer le tableau des signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ (en utilisant un point par intervalle, au besoin) et déduire le comportement de la courbe.

9. Identifier les extréma (max/min) et points d'inflexion de f (points où $f''(x)$ change de signe) et calculer la valeur de f en ces points.

10. Tracer la courbe.

On illustre la marche à suivre à l'aide de 2 exemples représentatifs.

Exemple: esquisser le graphique de $y = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$.

Exemple: esquisser le graphique de $y = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$.

1. La fonction $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$ n'est pas définie lorsque son dénominateur $x^2 - 1 = 0 \implies x = -1$ et $x = 1$. Ainsi,

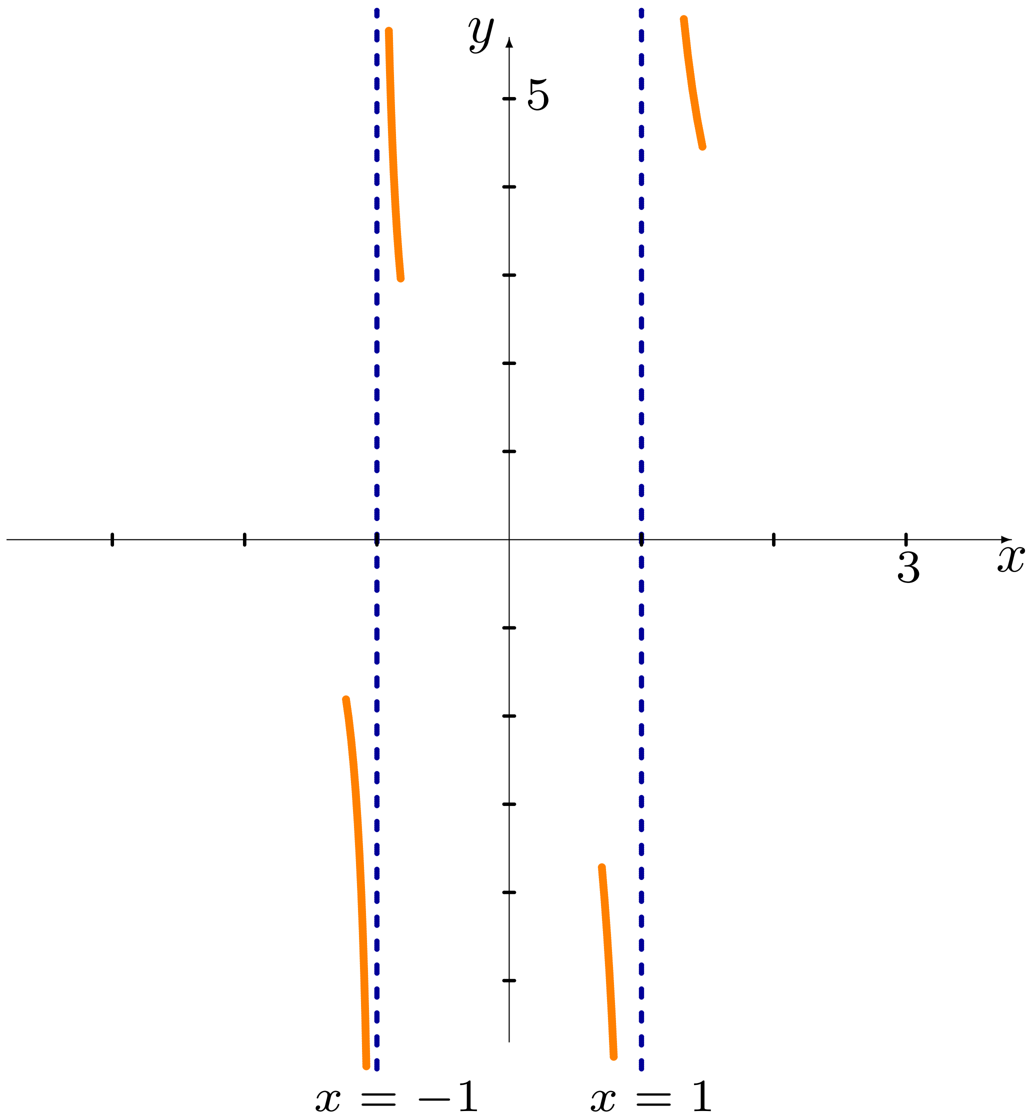
$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2. Si la fonction possède des A.V., c'est lorsque $x = -1$ et $x = 1$. Puisque

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+2x}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+2x}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2x}{x^2-1} = +\infty,$$

la fonction possède deux A.V., en $x = -1$ et $x = 1$.


y
5
3
x
$x = -1$
$x = 1$

3. Puisque

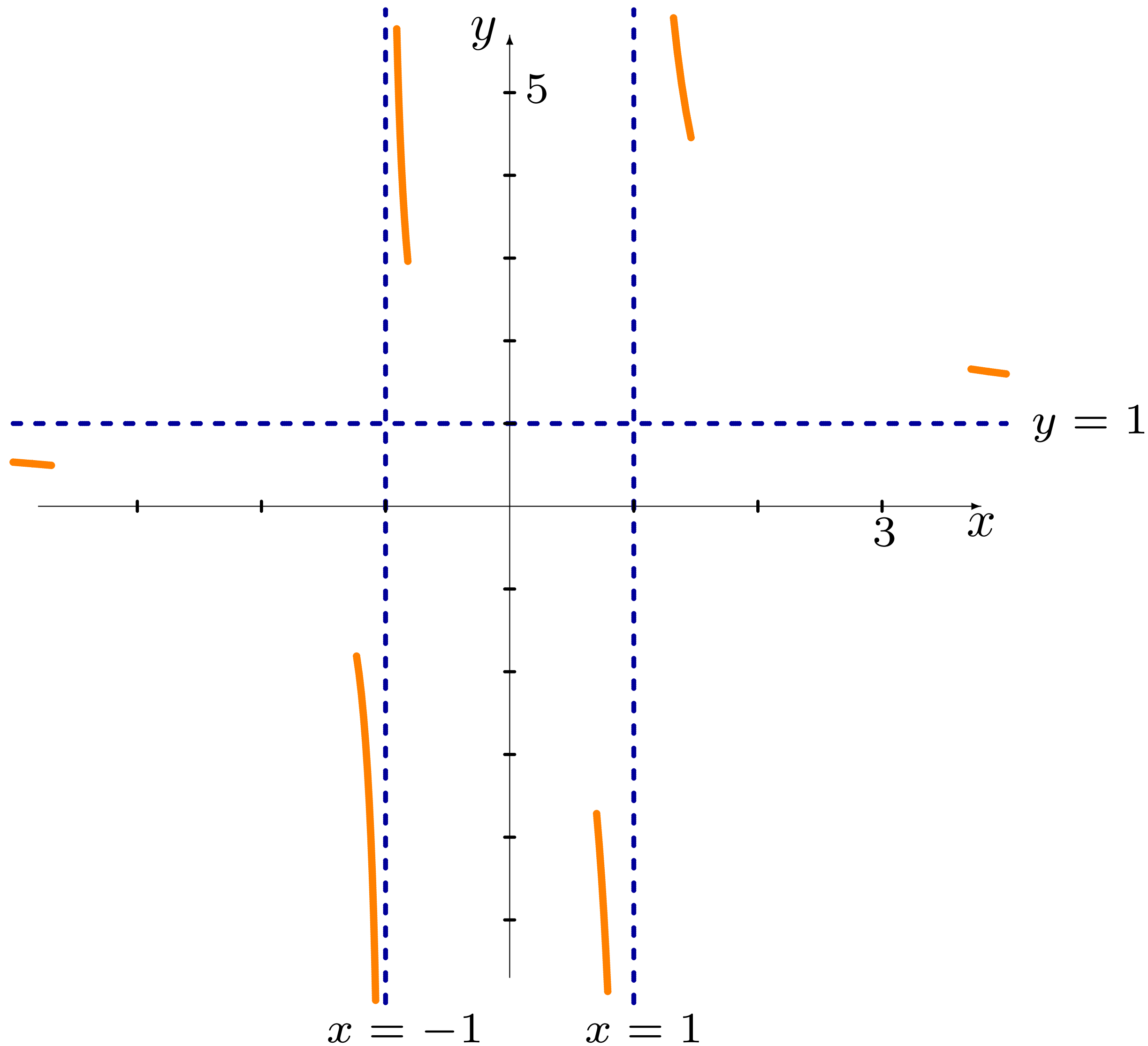
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-1}=1^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-1}=1^+,$$

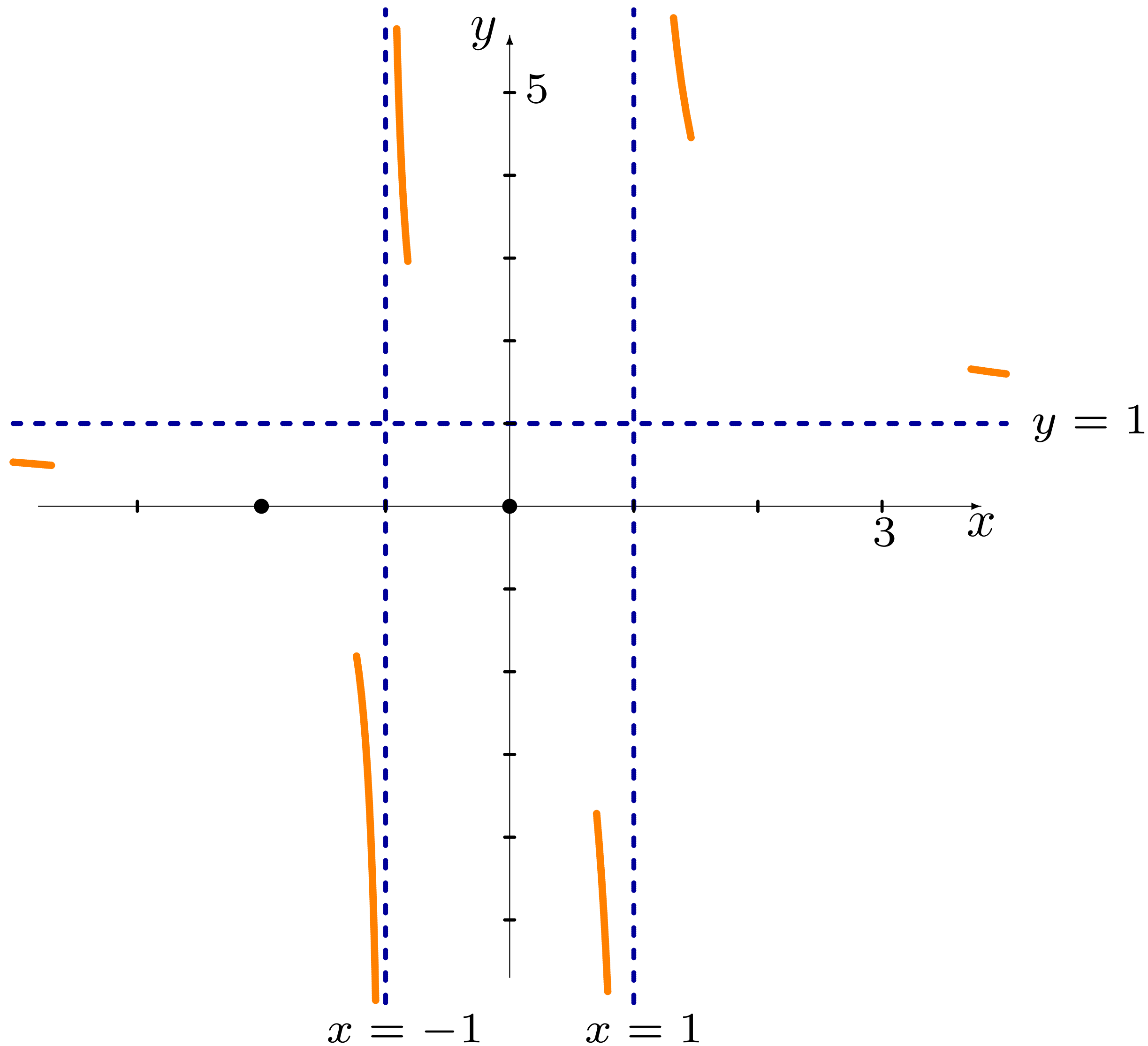
la fonction possède une A.H., en $y=1$.

4. Les zéros de la fonction sont les valeurs x telles que $f(x)=0$, c'est-à-dire telles que le numérateur $=0 \implies x^2+2x=0 \implies x=-2,0$, d'où $Z_f=\{-2,0\}$.

   L'ordonné à l'origine est obtenue en substituant $x=0$ dans $f(x)$. Mais $f(0)=\frac{0^2+2(0)}{0^2-1}=0$, d'où $O_f=\{0\}$.

   La courbe du graphique doit alors passer par les points $(-2,0)$ et $(0,0)$.


y
5
3
x
y = 1
x = −1
x = 1


y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$

5. La dérivée de $f(x)$ est

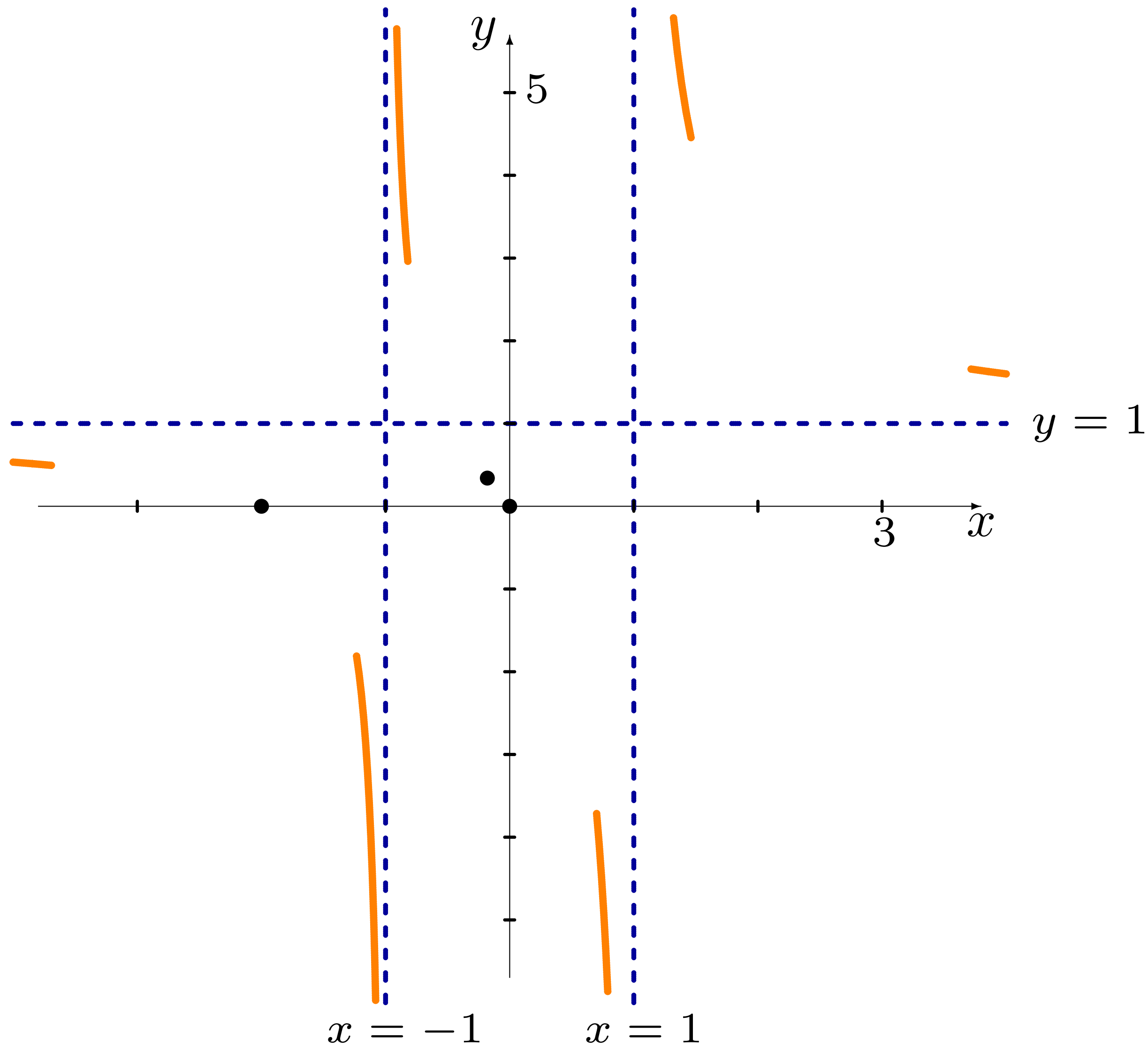
$$f'(x) = \frac{-2(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2};$$

$f(x)$ n'a pas de points critiques puisque le numérateur x^2+x+1 n'est jamais nul sur D_f.

6. La seconde dérivée de $f(x)$ est

$$f''(x) = \frac{2(2x^3+3x^2+6x+1)}{(x^2-1)^3};$$

$x \in \mathrm{INFL}_f \implies f''(x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}(3^{2/3} - 3^{1/3} - 1) \approx -0.1811.$ La valeur de la fonction à ce point est ≈ 0.3405.



y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$

7. Les points utilisés dans la partition de $\mathbb{R}$ sont

$$-1, -0.1811\ldots, 1.$$

8. Le comportement de la courbe est donné par le tableau suivant:

		$x=-1$		$x \approx -0.18$		$x=1$	
$f'(x)$		$\times$				$\times$	
$f''(x)$		$\times$		0		$\times$	
$f(x)$		A.V.				A.V.	

7. Les points utilisés dans la partition de $\mathbb{R}$ sont

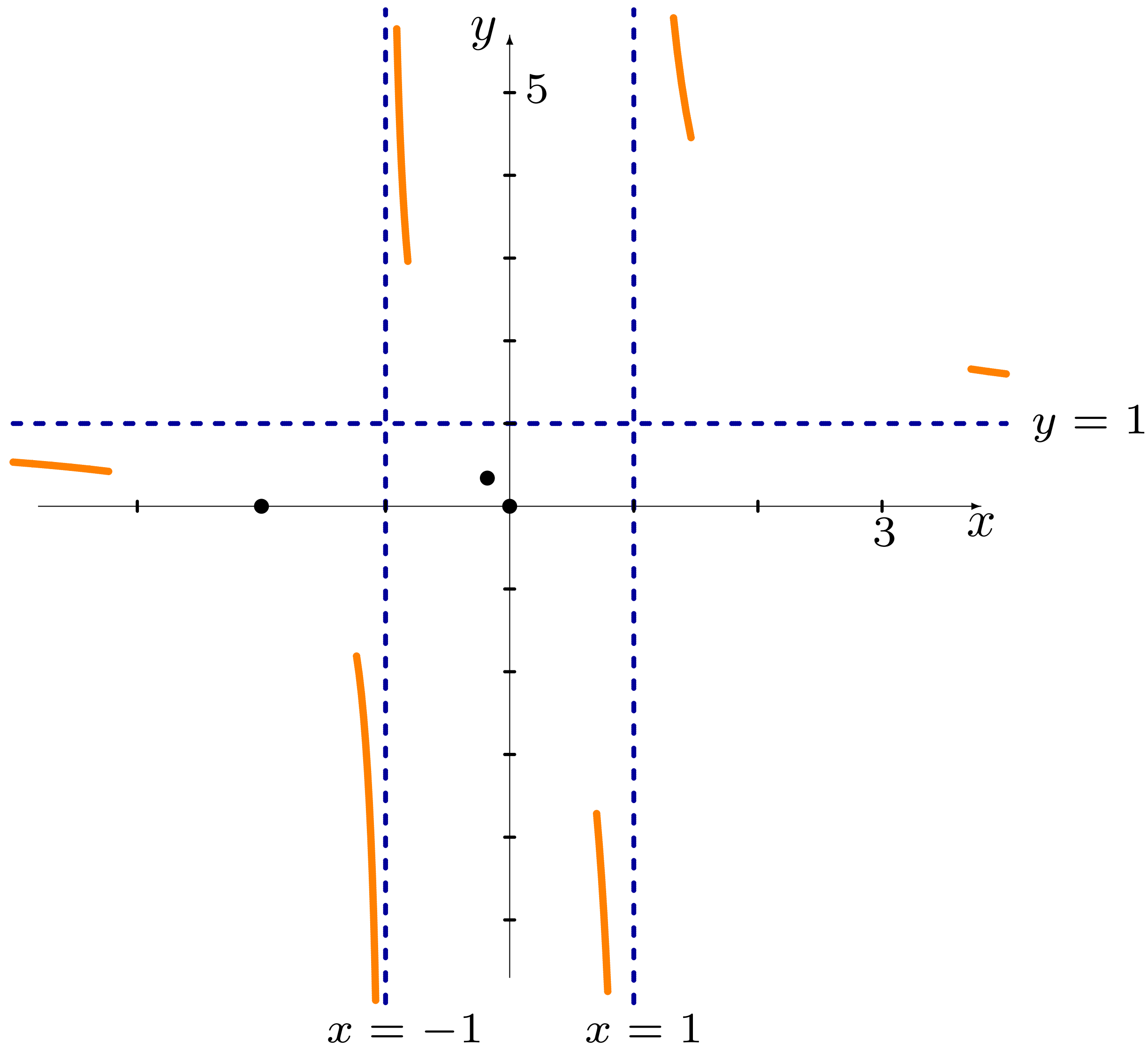
$$-1, -0.1811\ldots, 1.$$

8. Le comportement de la courbe est donné par le tableau suivant:

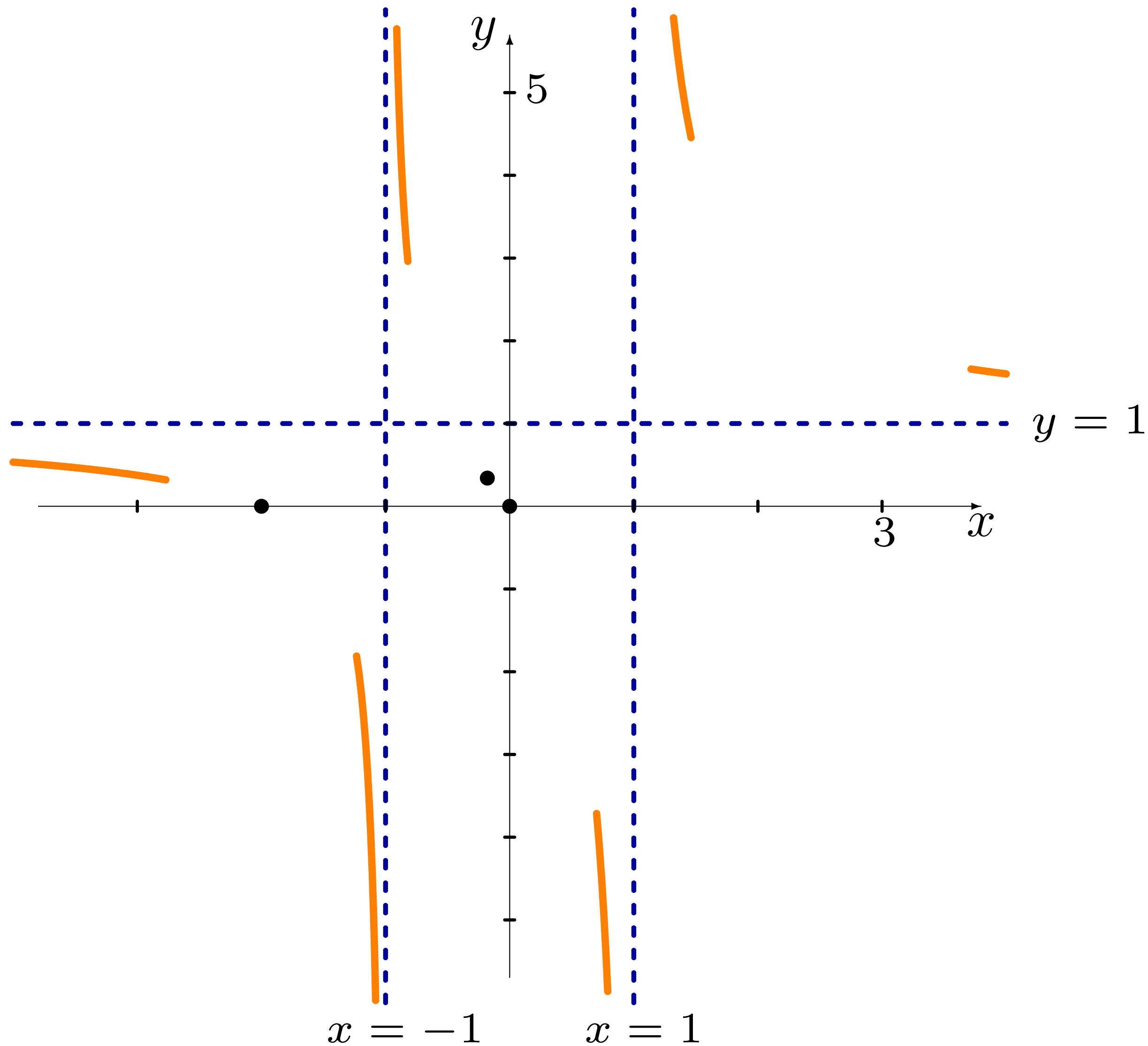
		$x=-1$		$x \approx -0.18$		$x=1$	
$f'(x)$	$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$f(x)$		A.V.		INFL.		A.V.	

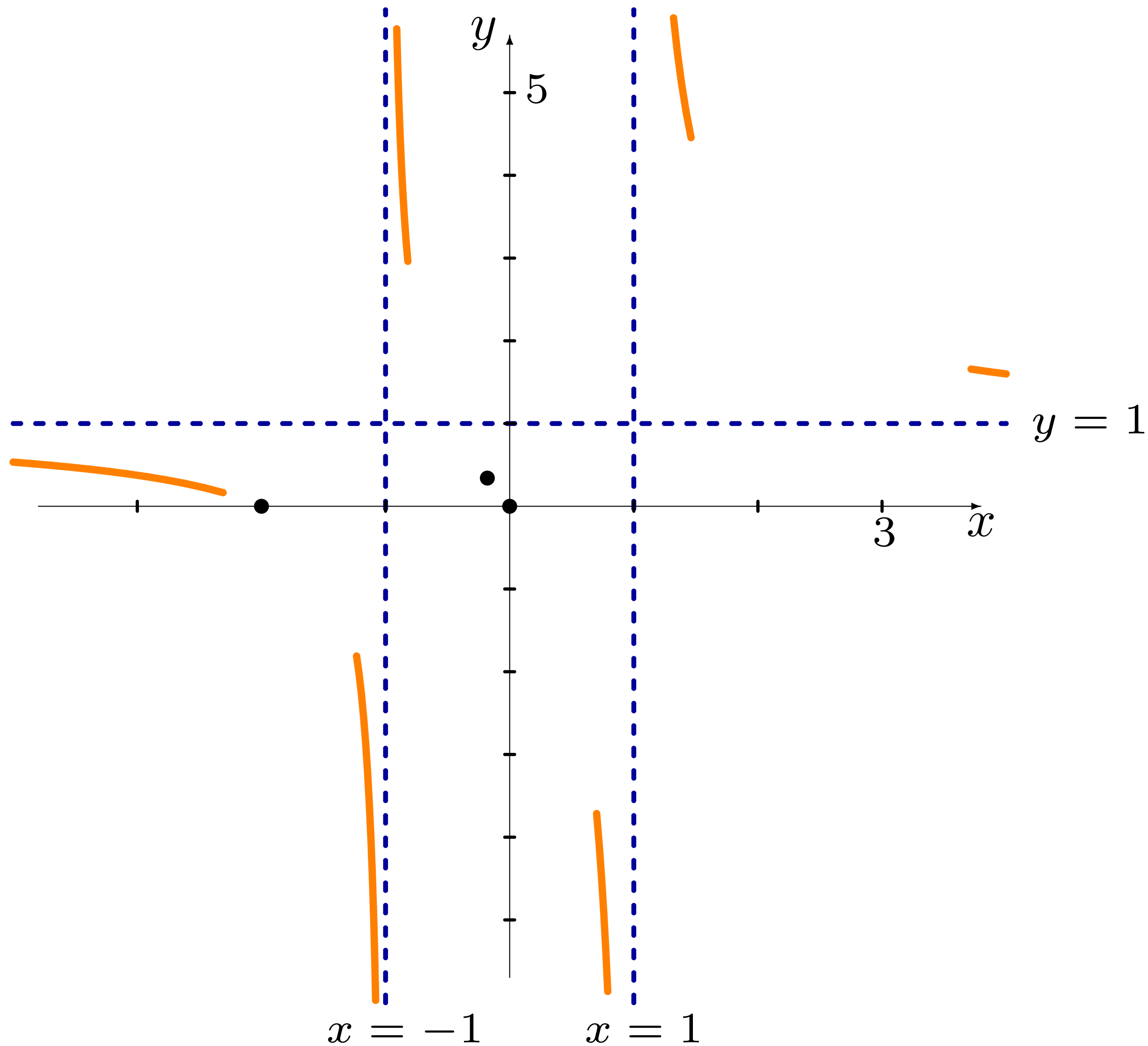
9. La fonction possède donc un point d'inflexion en $x \approx -0.1811$.

10. On peut maintenant tracer le graphique.

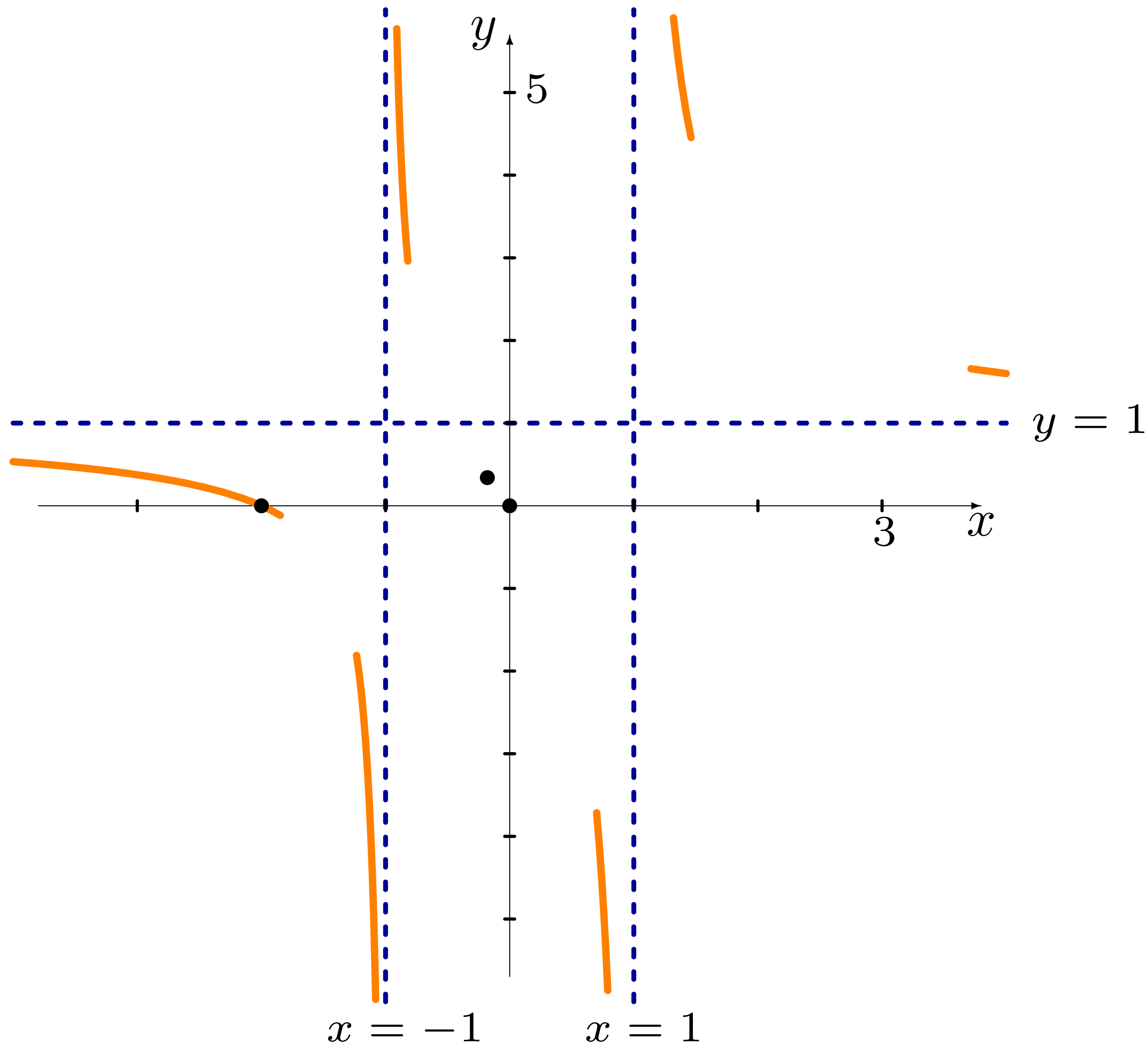


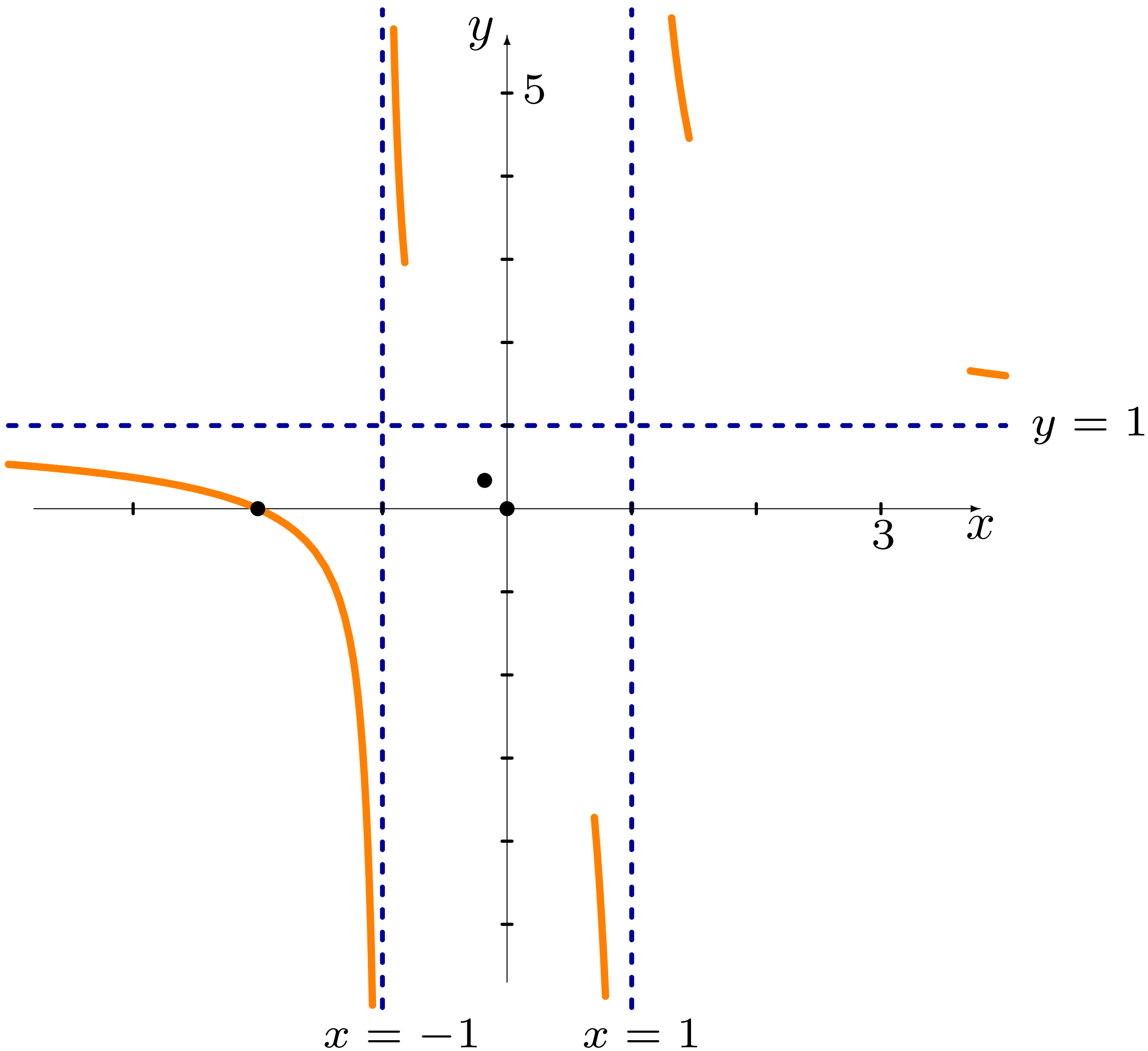
y
5
y = 1
3
x
x = −1
x = 1

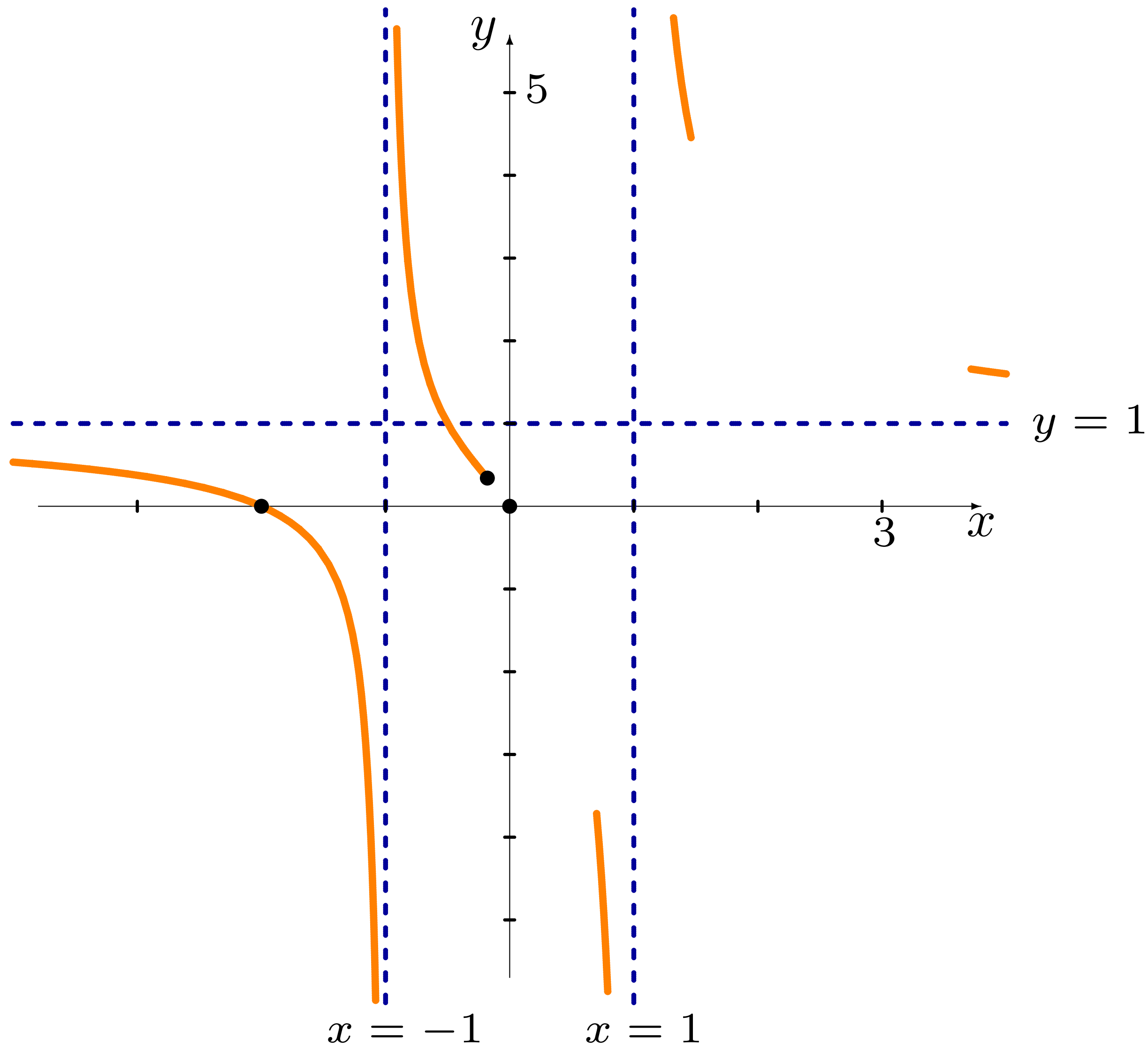

y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$



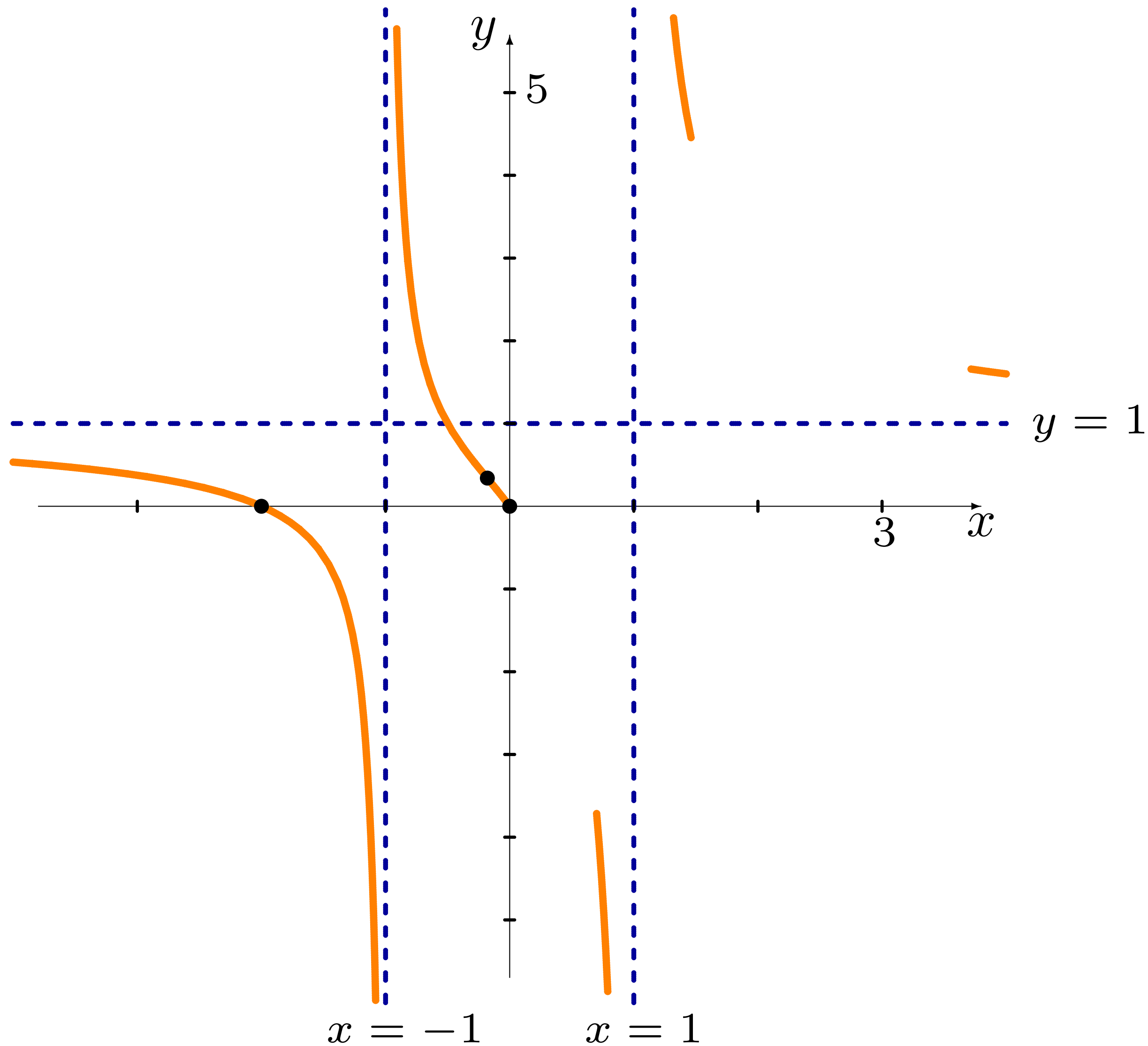
y
5
y = 1
3
x
x = −1
x = 1


y
5
y = 1
3
x
x = −1
x = 1

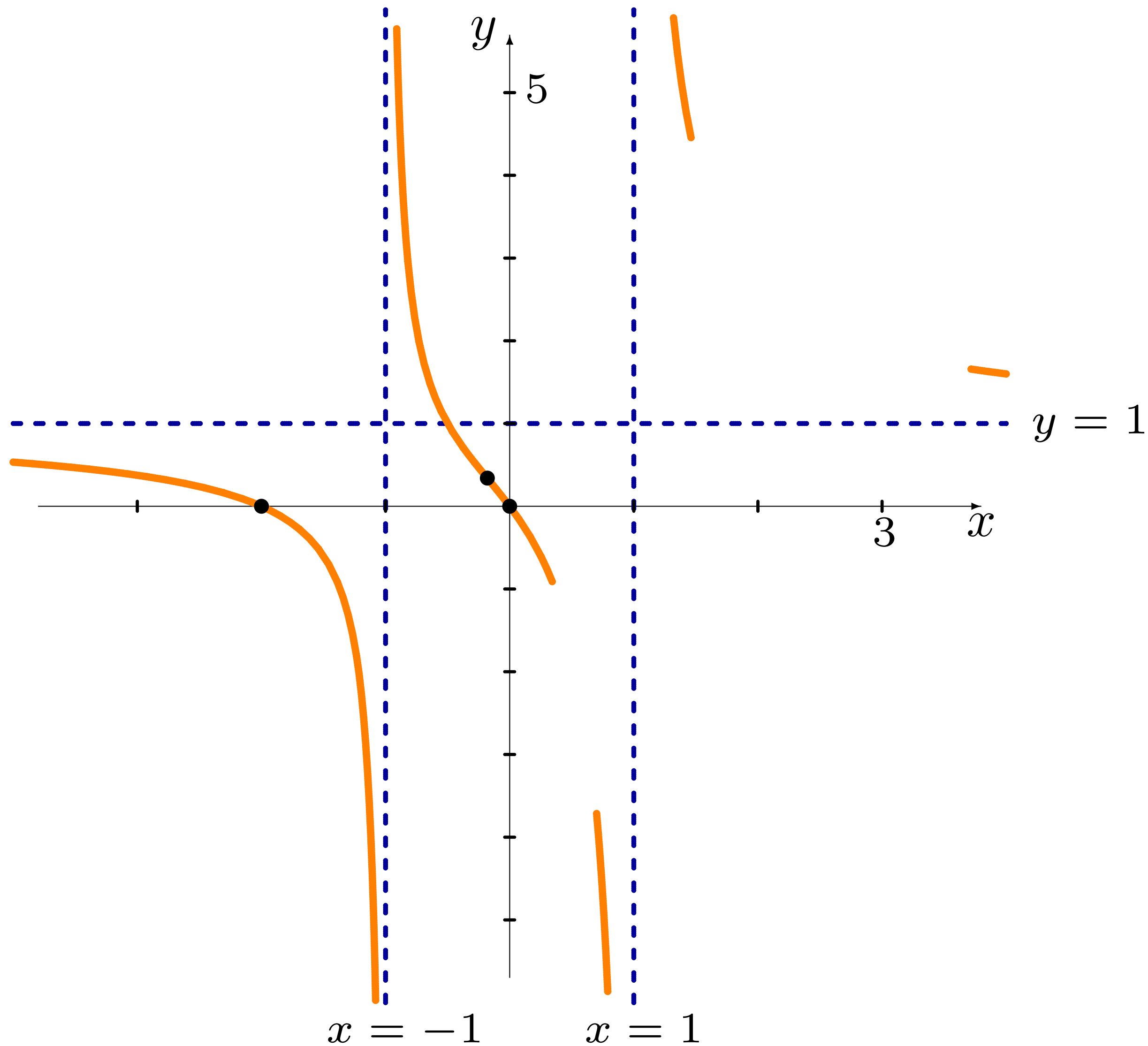

y
5
x
3
y = 1
x = −1
x = 1

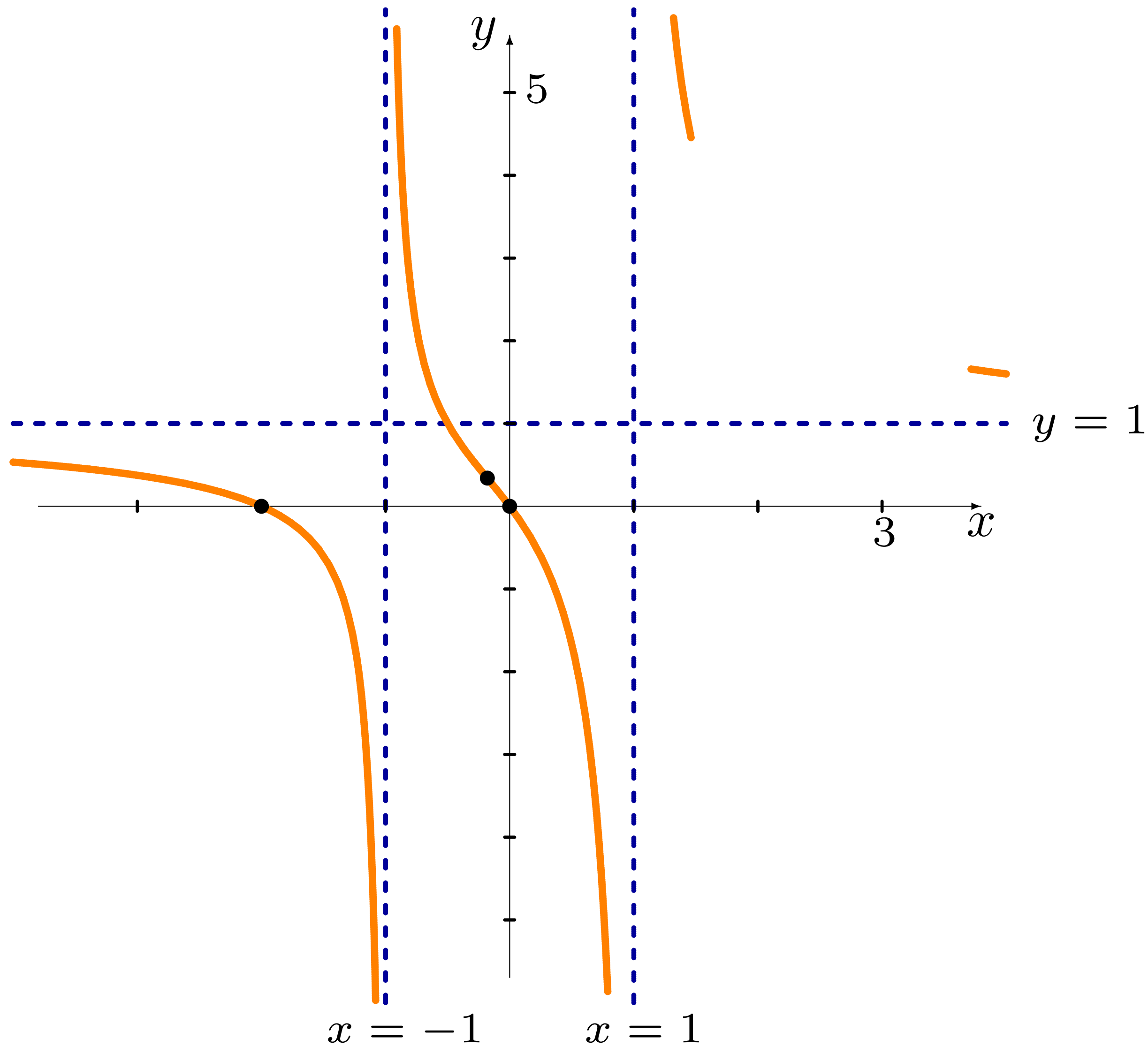


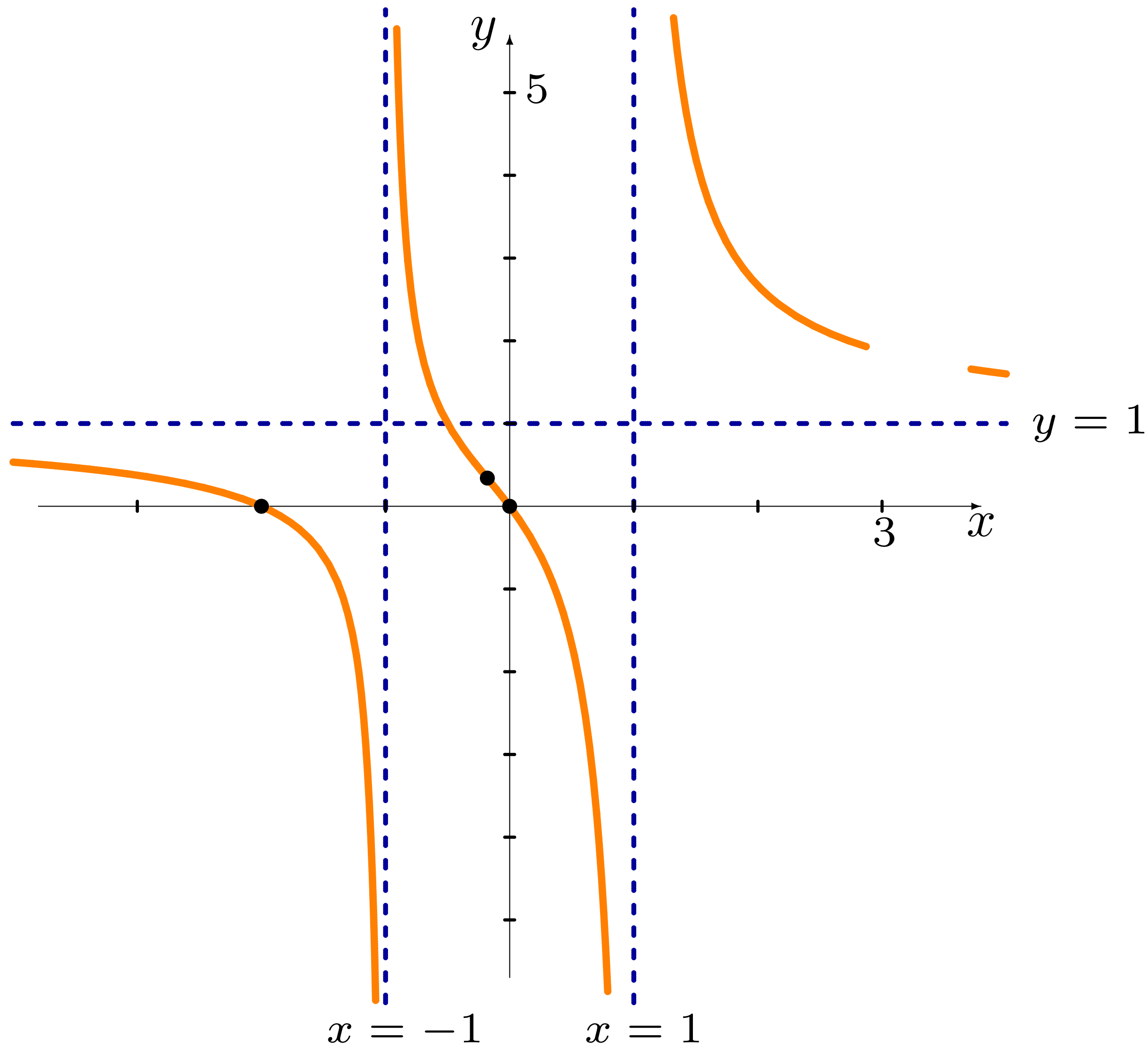
y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$



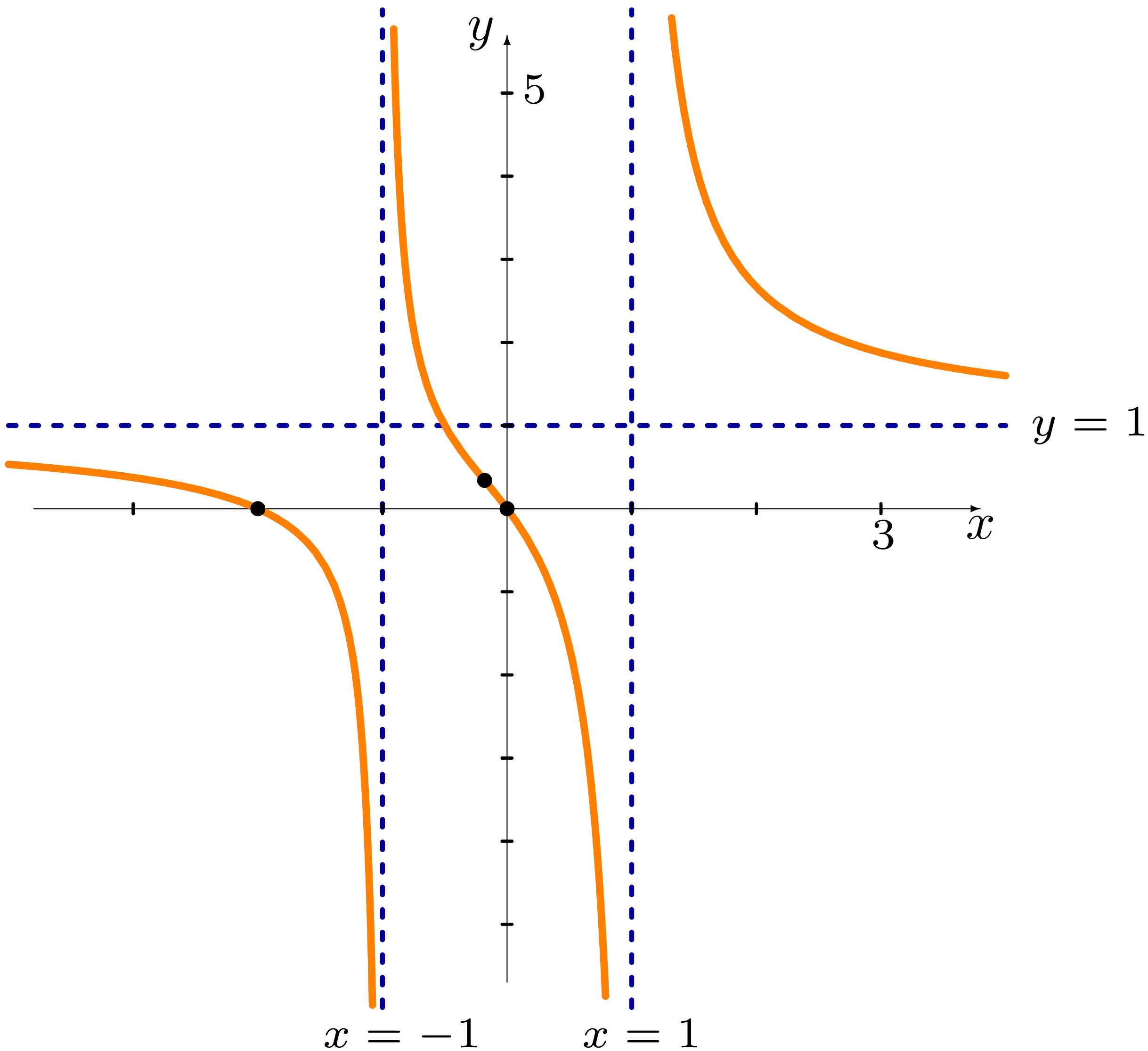
y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$


y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$

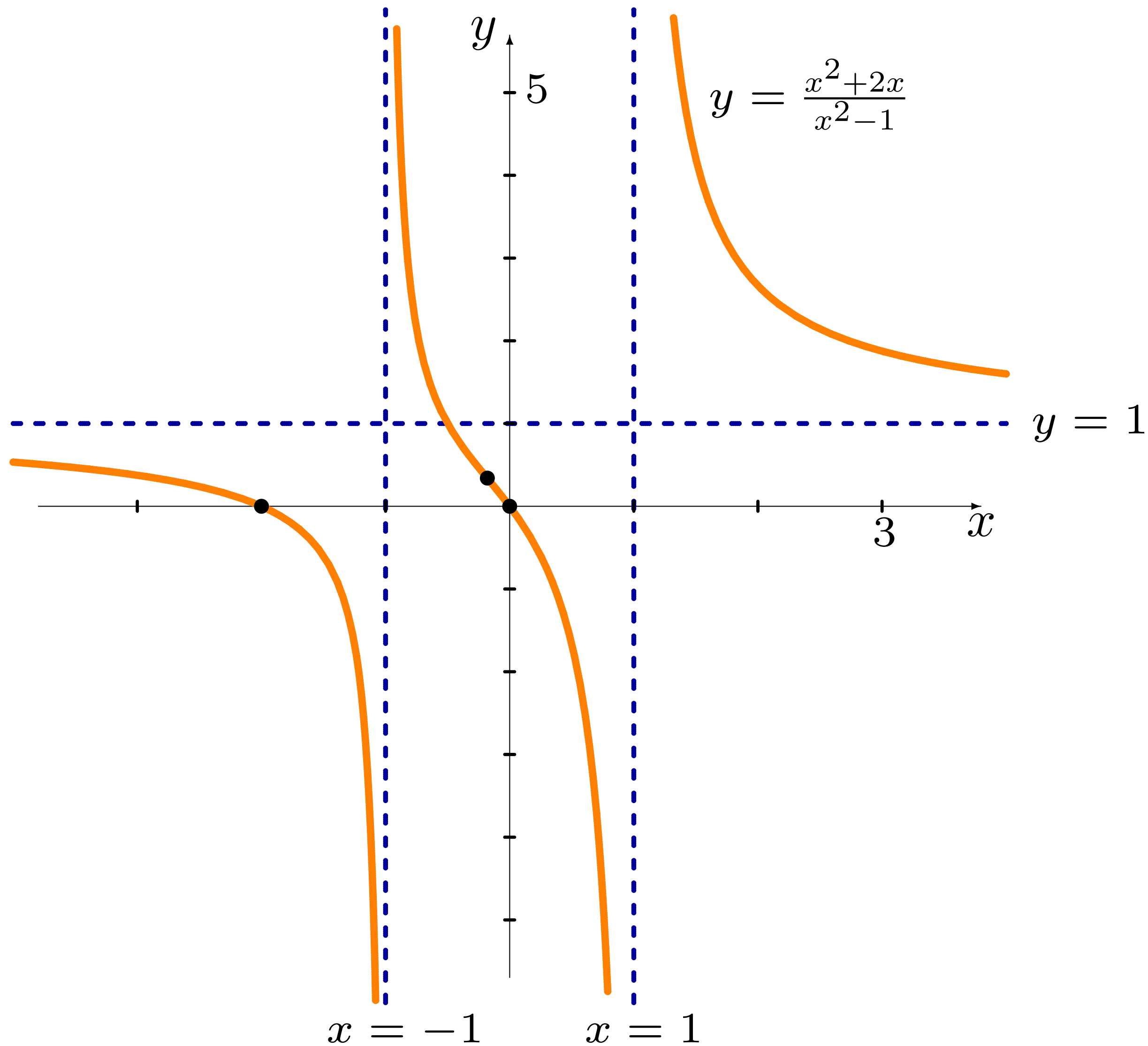

y
5
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$



y
5
y = 1
3
x
x = −1
x = 1



y
5
x
3
$y = 1$
$x = -1$
$x = 1$


y
5
$y = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$
$y = 1$
3
x
$x = -1$
$x = 1$

Exemple: esquisser le graphique de $y = x(x-1)^3$.

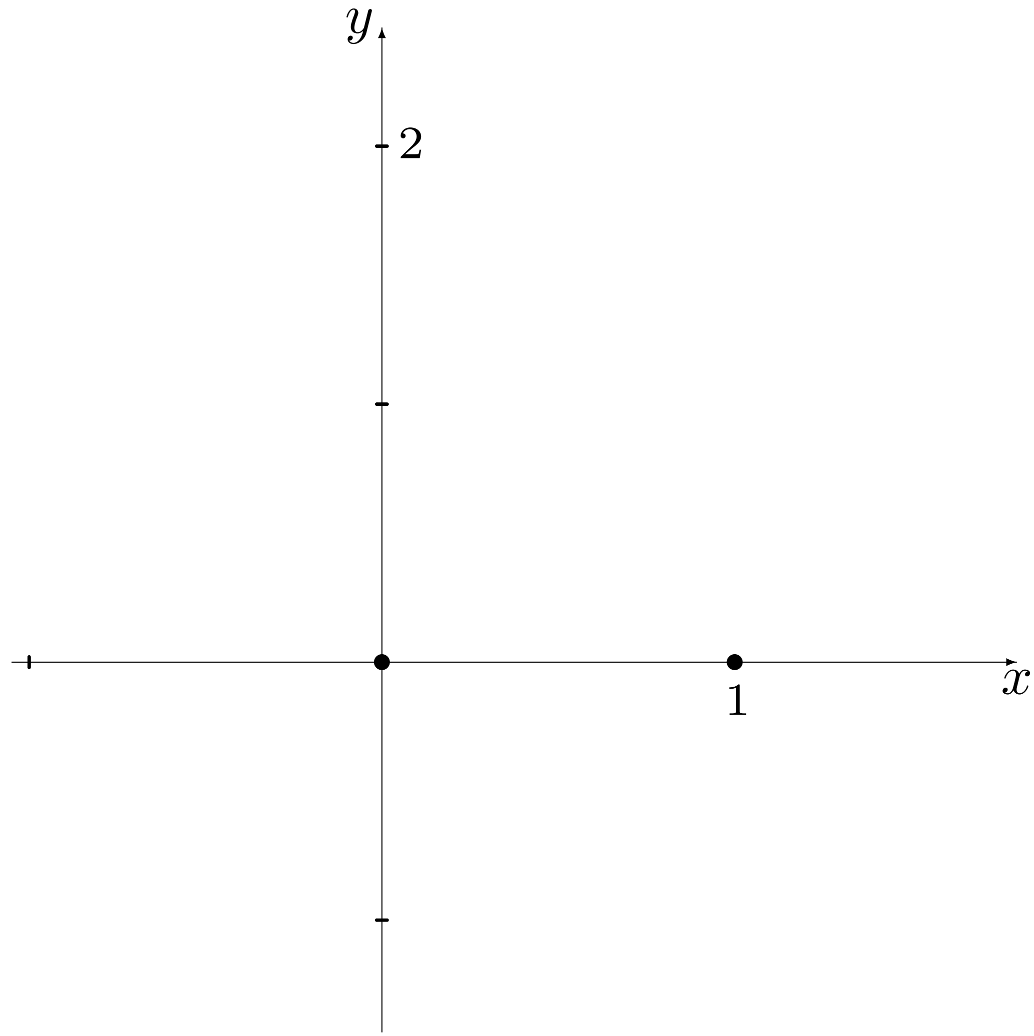
Exemple: esquisser le graphique de $y = x(x-1)^3$.

1. La fonction $f(x) = x(x-1)^3$ est définie pour tout x: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Puisqu'elle est toujours définie, elle ne possède pas d'A.V.

3. Puisque $f(x) = x(x-1)^3 = \frac{x(x-1)^3}{1}$ est une fonction rationnelle: $\deg(\text{num}) = 4 > 0 = \deg(\text{dénom}) \implies f(x)$ ne possède pas d'A.H.

4. Les zéros de la fonction sont les valeurs x telles que $f(x) = 0$, c'est-à-dire telles que $x(x-1)^3 = 0 \implies Z_f = \{0, 1\}$. L'ordonné à l'origine est obtenue en substituant $x = 0$ dans $f(x)$. Mais $f(0) = 0(0-1)^3 = 0$, d'où $O_f = \{0\}$. La courbe doit donc passer par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.


y
2
x
1

5. La dérivée de la fonction est

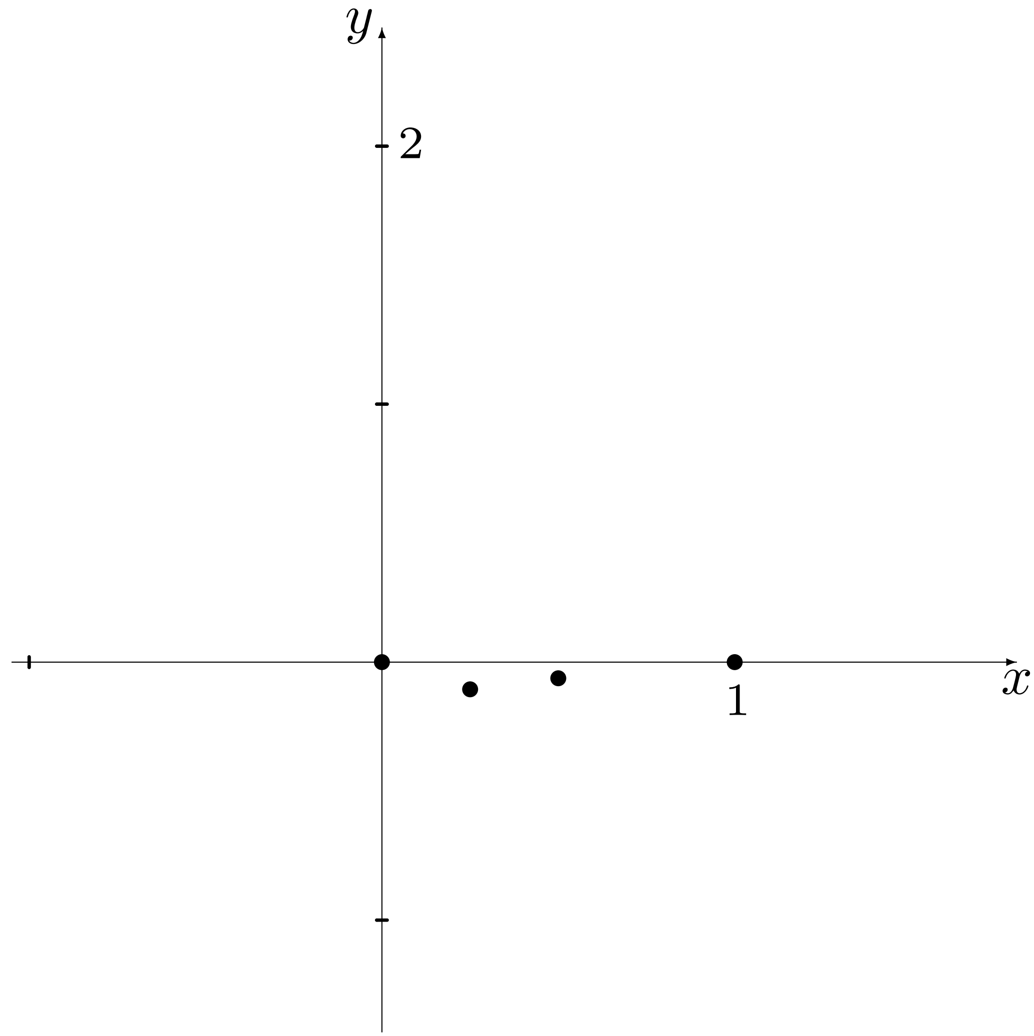
$$f'(x) = (4x - 1)(x - 1)^2,$$

qui est définie pour tout x; $f'(x)$ possède alors des points critiques lorsque $f'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{4}, 1$. La courbe doit donc passer par les points $(\frac{1}{4}, -\frac{27}{256})$ et $(1, 0)$.

6. La seconde dérivée de la fonction est

$$f''(x) = 6(2x - 1)(x - 1),$$

qui est toujours définie; $x \in \mathrm{INFL}_f \implies f''(x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}, 1$. La courbe doit donc passer par les points $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$ et $(1, 0)$.



y
2
x
1

7. Les points utilisés dans la partition de $\mathbb{R}$ sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1.$

8. Le comportement de la courbe est donc donné par le tableau suivant:

	$x < \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$		0					
$f''(x)$				0		0	
$f(x)$							

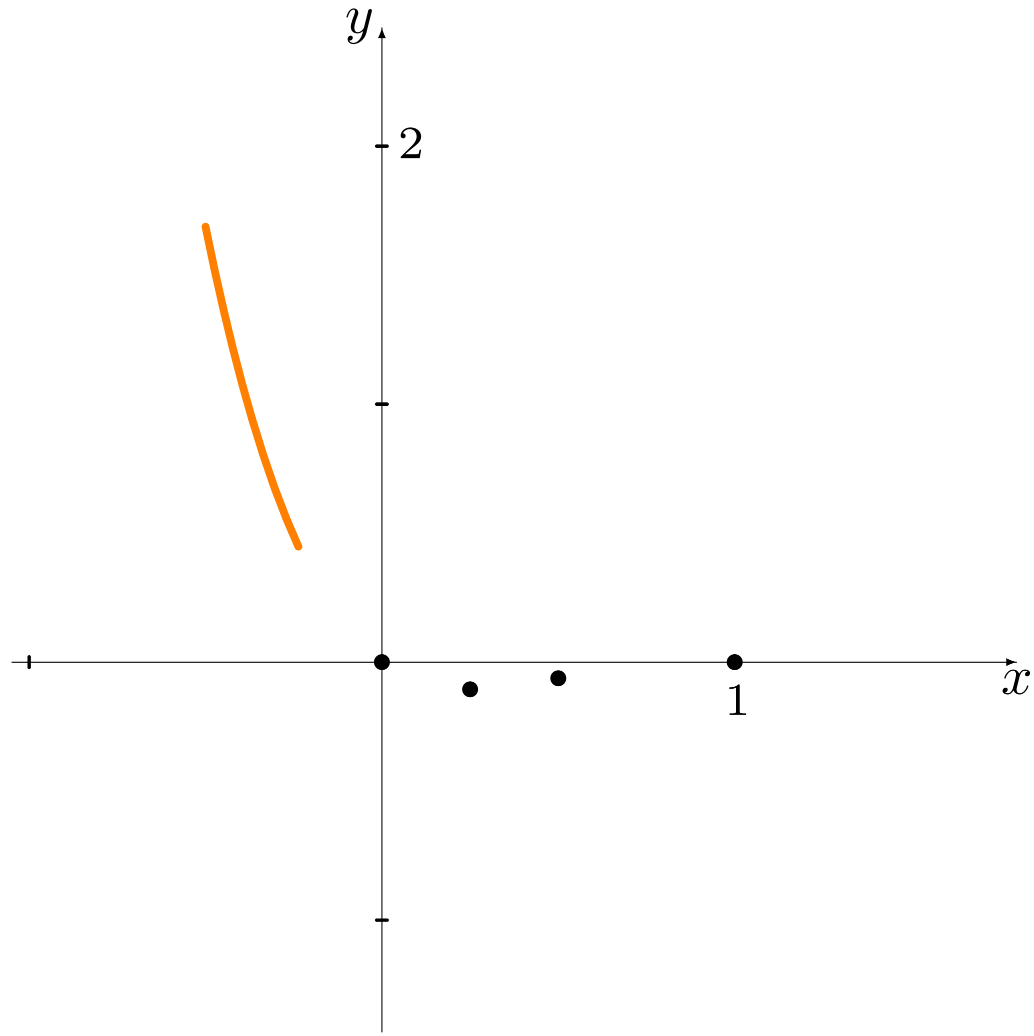
7. Les points utilisés dans la partition de $\mathbb{R}$ sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

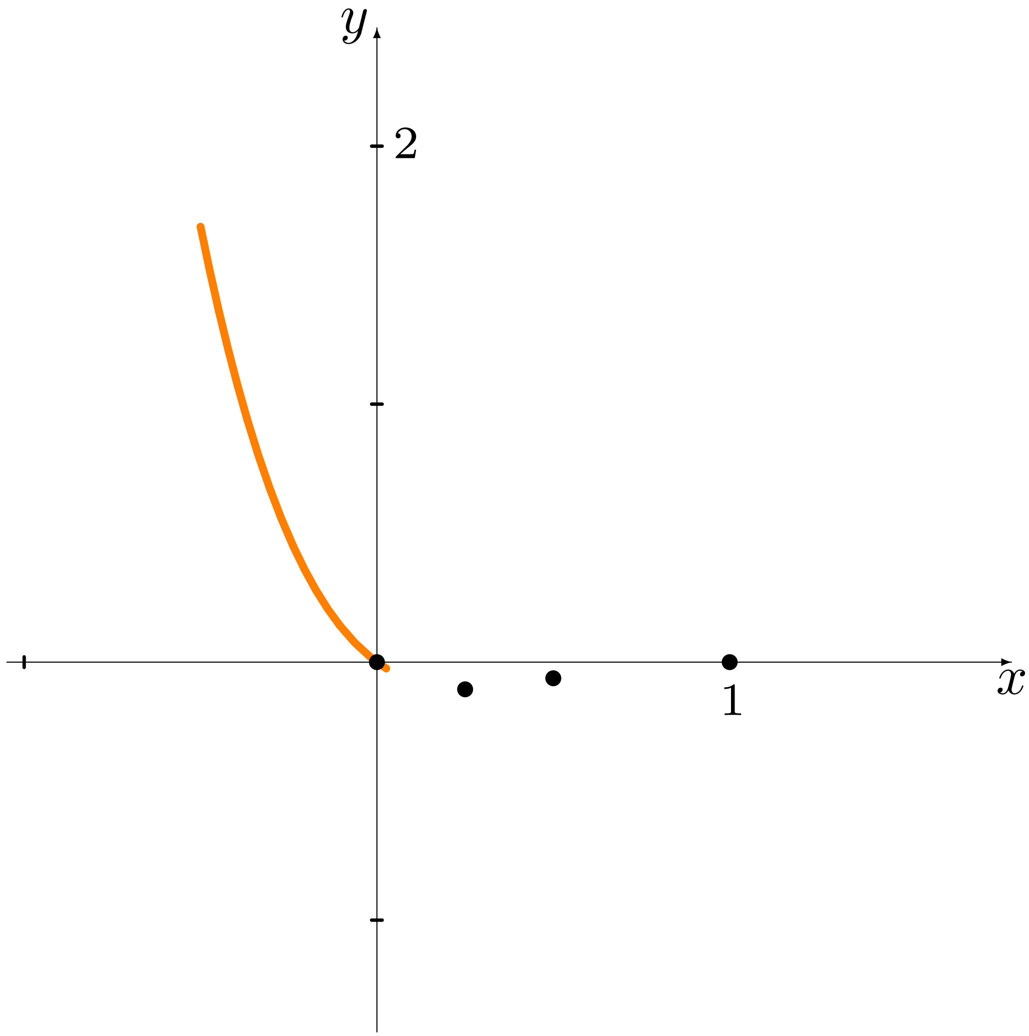
8. Le comportement de la courbe est donc donné par le tableau suivant:

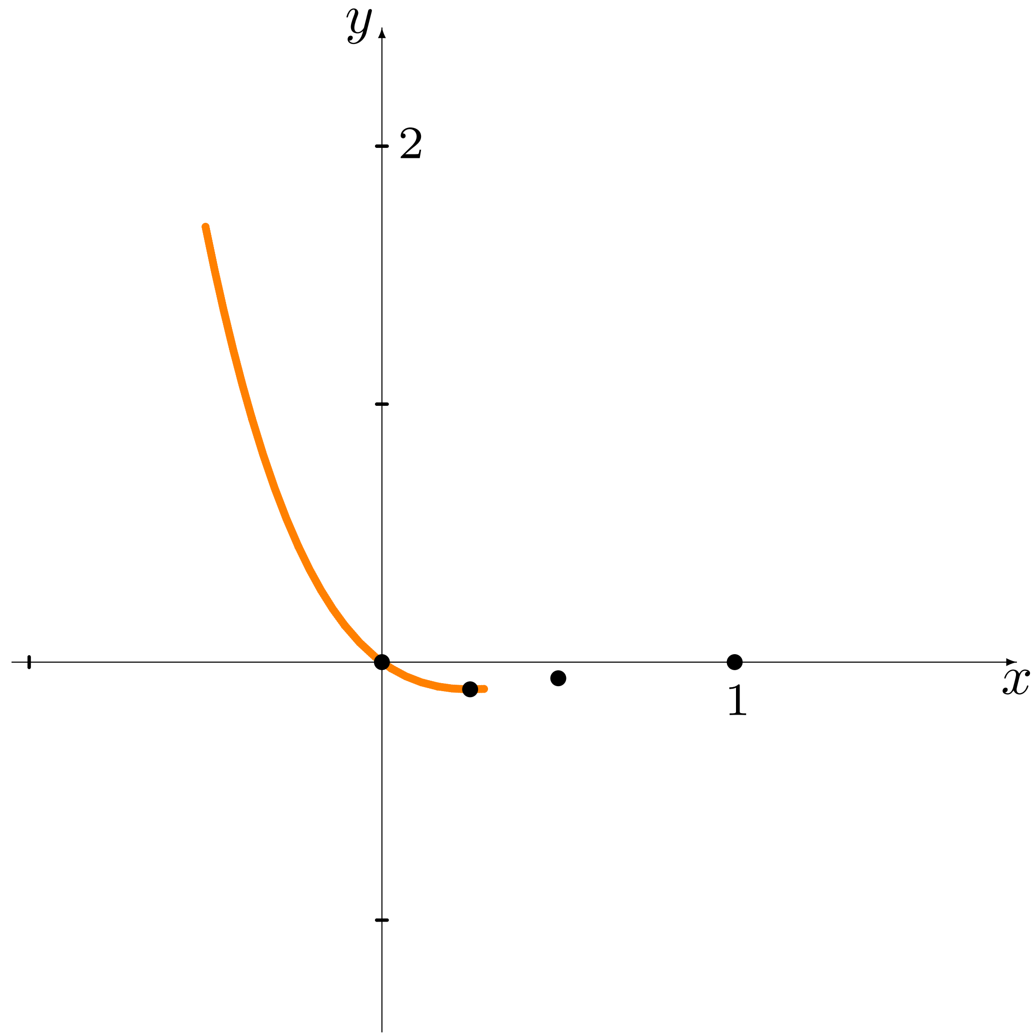
	$x < \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		MIN.		INFL.		INFL.	

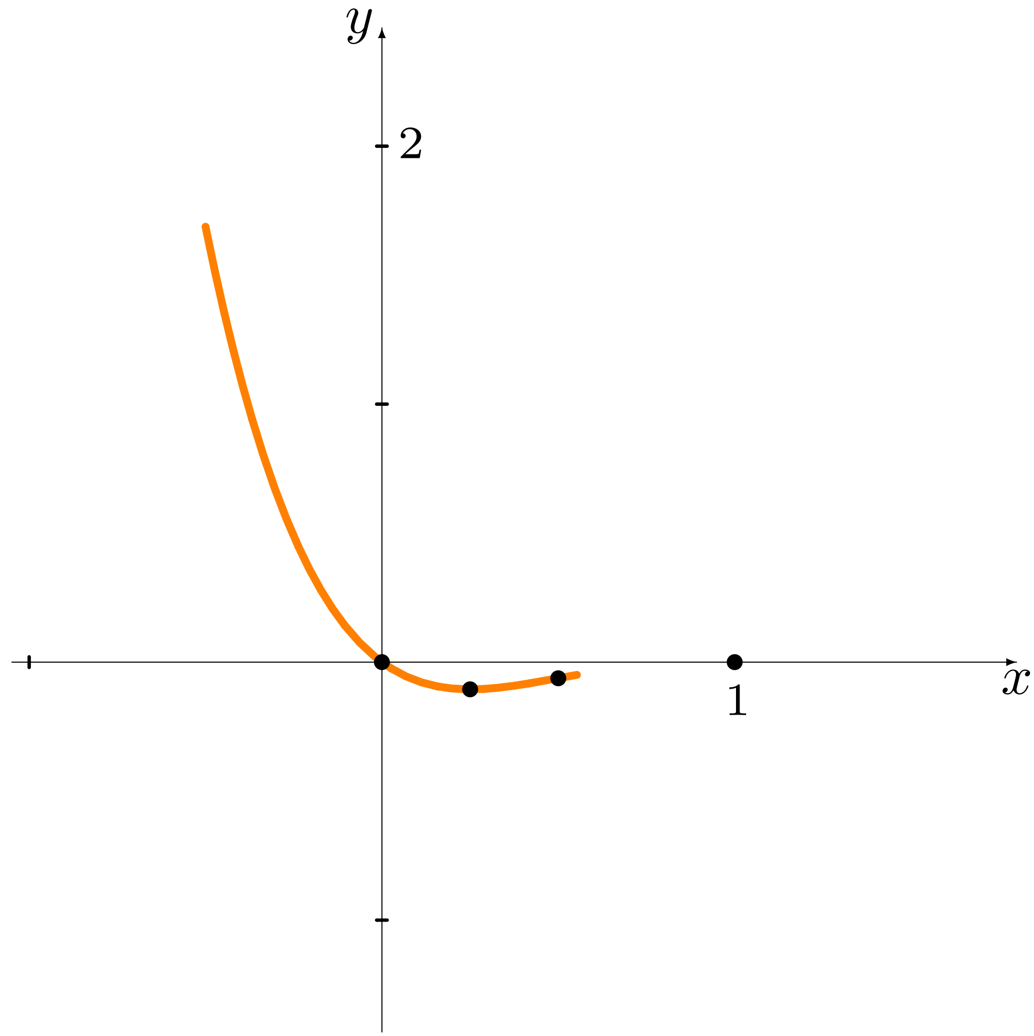
9. La fonction possède un minimum local en $x = \frac{1}{4}$, et des points d'inflexion en $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

10. On peut maintenant tracer le graphique.

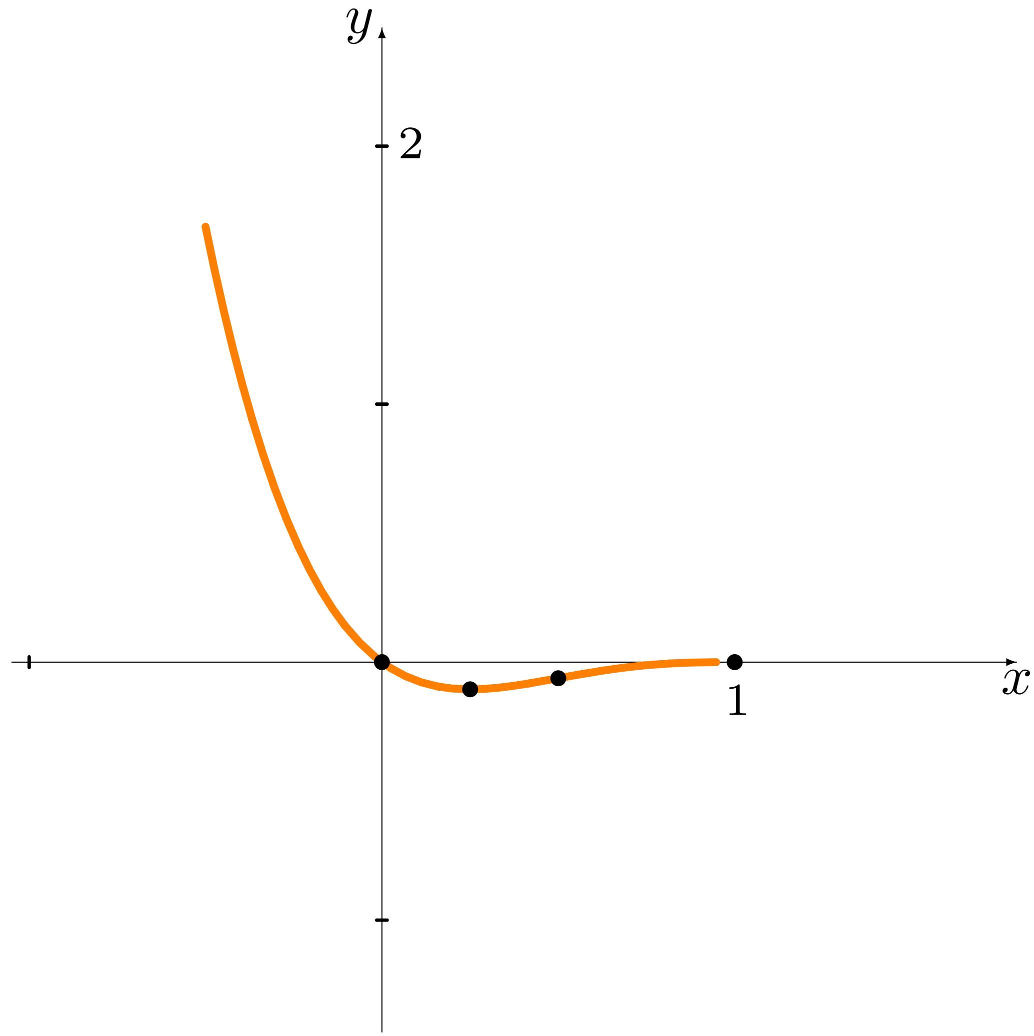

y
2
x
1

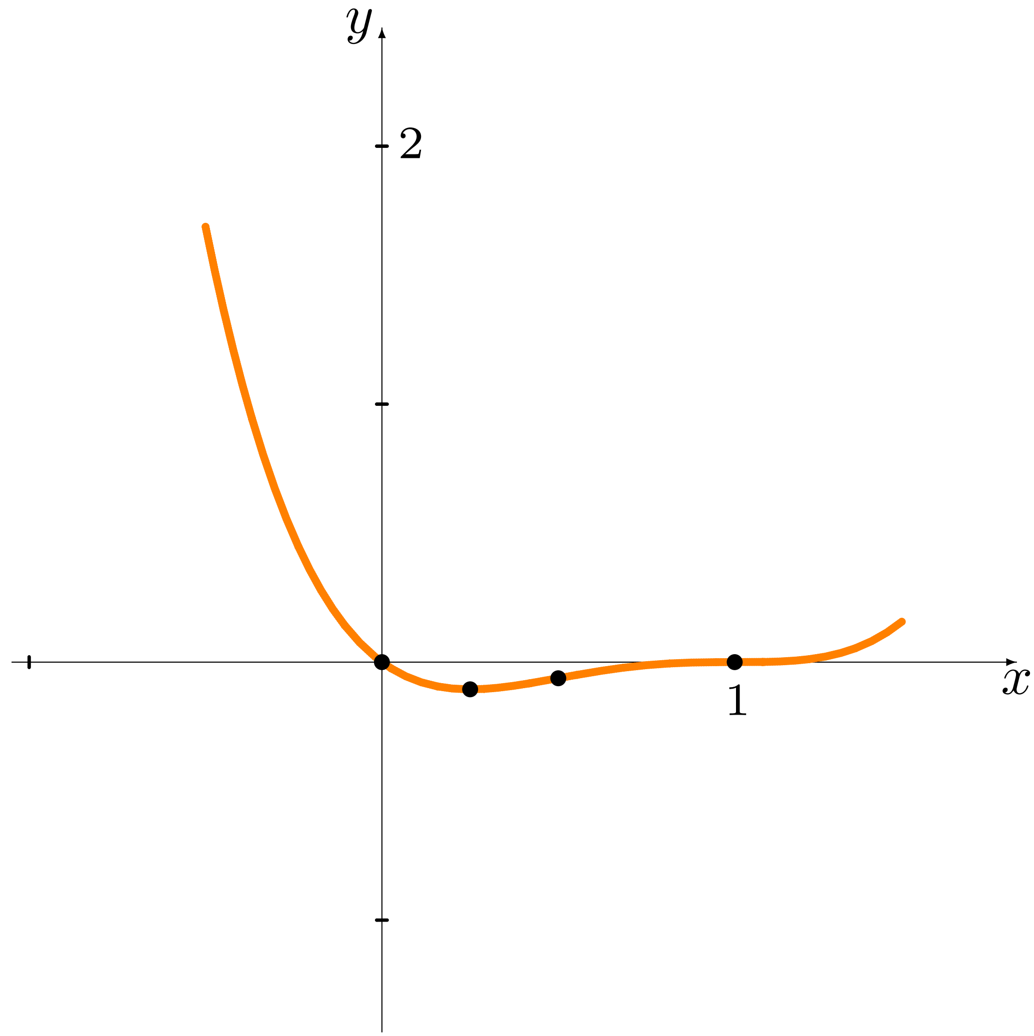

y
2
x
1

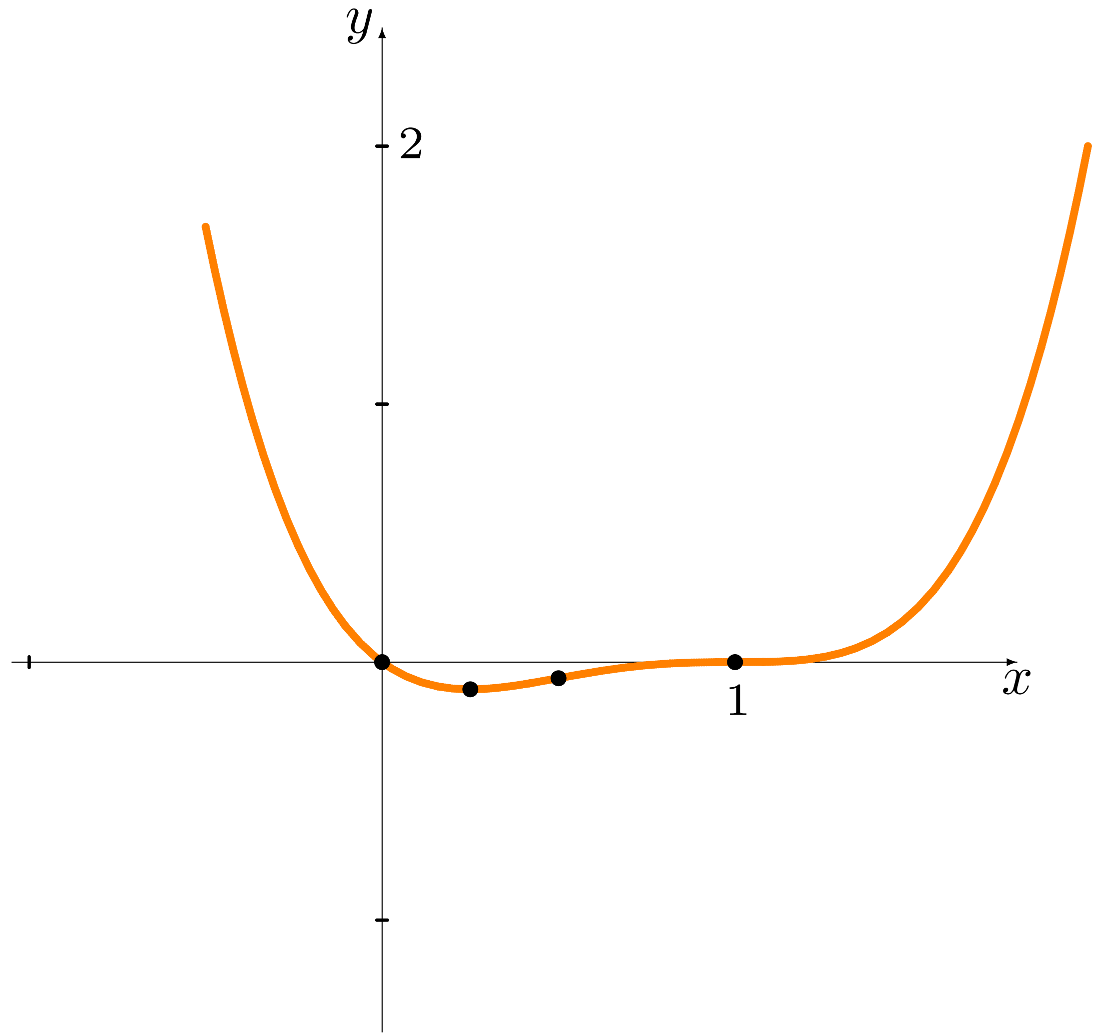

y
2
x
1

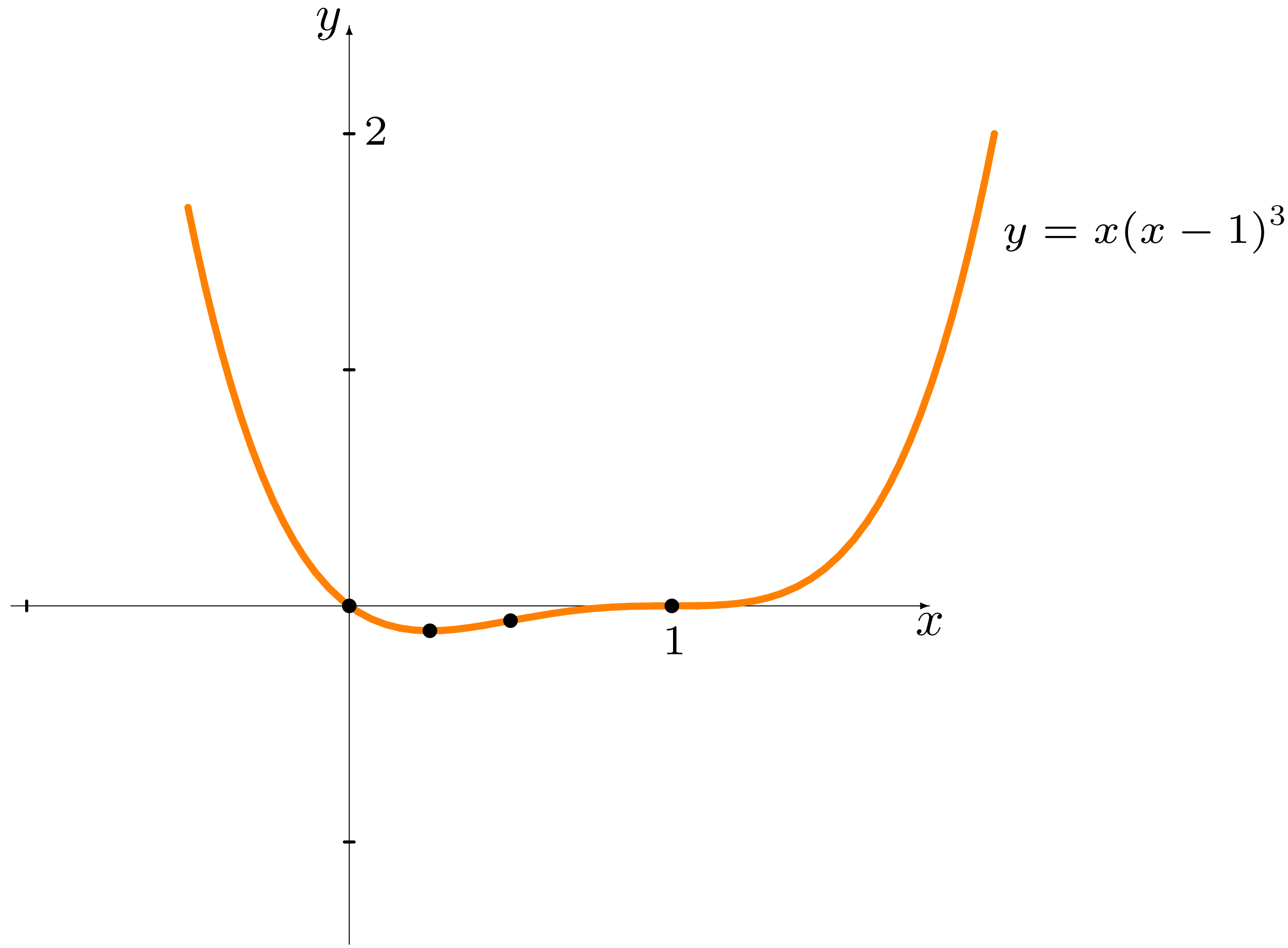


y
2
x
1


y
2
x
1


y
2
x
1


y
2
x
1


y
2
$y = x(x-1)^3$
1
x

La marche à suivre donne, en théorie, une méthode pour tracer le graphique de toute fonction algébrique (en fait, de toute fonction **continue par morceaux**).

⚠ En pratique, il peut s'avérer très difficile de trouver les points critiques et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

lorsque $\deg p(x), \deg q(x)$ sont élevés.

Le problème devient alors un problème de recherche de racines, et il faut utiliser des méthodes numériques (en dehors du cadre de ce cours).

6.4 – L'élasticité de la demande

Normalement, la demande pour un bien est affectée **par le prix auquel il se vend**. En pratique, tous les biens ne sont pas affectés de la même façon.

Si le gouvernement augmente les taxes sur le tabac et l'alcool, y aura-t-il un effet sur la demande de ces biens? S'il hausse les taxes sur les VTT?

L'**élasticité de la demande** mesure la variation de la demande en fonction du prix pour un bien particulier:

- lorsque la demande varie substantiellement en fonction du prix, elle est **élastique**;
- autrement, elle est **inélastique**.

Exemples:

1. La demande pour un concert de Taylor Swift est inélastique au prix: ses "vrai fans" se procureront des billets peu importe le prix auquel elle les vend, puisqu'il n'y a pas de substitut.

2. La demande en ordinateurs portatifs semble inélastique au prix: peu importe son prix moyen, le nombre d'unités vendues demeurent "sensiblement" le même.

   Mais la demande en ordinateurs portatifs d'une compagnie particulière est élastique au prix: si Lenovo augmente drastiquement le prix de ses PC, on s'attend à ce que la demande pour un Lenovo diminue drastiquement puisque plusieurs consommateurs se procureront un Mac à la place, par exemple.

En général, la demande d'un bien considéré **essentiel** est inélastique au prix; celle d'un bien considéré **superflu** (ou s'il existe un substitut) est élastique.

L'élasticité de la demande n'est pas seulement une propriété d'un bien, c'est aussi une propriété de la **société** et de la **période de consommation**:

- la demande en *Vegemite* est inélastique au prix en Australie, et elle l'est également au Canada, mais pas pour les mêmes raisons (en avez-vous déjà mangé?);
- la demande pour un véhicule électrique était très élastique au prix en 2004, mais elle l'est assurément moins en 2021.

⚠ **Le concept de l'élasticité demeure vague; sa définition repose sur le terme "substantiellement", dont la signification est floue.**

Soient D_1 la demande d'un bien associée au prix P_1 et D_2 la demande associée à P_2. Alors

$$\Delta P = P_2 - P_1, \quad \Delta D = D_2 - D_1, \quad P_{\text{moy}} = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad D_{\text{moy}} = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

représentent la **variation du prix**, celle de la **demande**, le **prix moyen** et la **demande moyenne**.

L'**élasticité moyenne** η_{moy} **de la demande** en D_{moy} est

$$\eta_{\text{moy}} = \frac{\Delta D / D_{\text{moy}}}{\Delta P / P_{\text{moy}}} = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P_{\text{moy}}}{D_{\text{moy}}}.$$

Exemple: une compagnie peut vendre 405 bicyclettes à $350\$$ l'unité mais seulement 225 bicyclettes à $600\$$ l'unité.

Nous avons alors $D_1 = 405$, $D_2 = 225$, $P_1 = 350$, $P_2 = 600$, d'où

$$\Delta P = 250, \quad \Delta D = -180, \quad P_{\text{moy}} = 475, \quad D_{\text{moy}} = 315$$

et

$$\eta_{\text{moy}} = \frac{-180}{250} \cdot \frac{475}{315} = -\frac{342}{315} \approx -1.09.$$

Qu'est-ce que cela veut dire?

C'est la magnitude de η_{moy} qui nous intérêsse:

- si $|\eta_{\text{moy}}| \leq 1$, la demande est **inélastique**;
- si $|\eta_{\text{moy}}| > 1$, elle est **élastique**;
- si $\eta_{\text{moy}} = 0$, elle est **parfaitement inélastique**;
- si η_{moy}"$=$"$\pm\infty$, elle est **parfaitement élastique**.

Dans notre exemple, la demande pour une bicyclette est (faiblement) élastique au prix lorsque $P_{\text{moy}} = 475\$$ et $D_{\text{moy}} = 315$.

L'élasticité moyenne est analogue à la vitesse moyenne: elle ne donne qu'une approximation de l'élasticité instantanée de la demande.

Soit $D = D(P)$ la demande d'un bien en fonction du prix P.

Supposons que D soient continue et différentiable. La variation de la demande lorsque le prix varie de P à $P + \Delta P$ est

$$\Delta D = D(P + \Delta P) - D(P).$$

L'**élasticité moyenne** dans ce cas est alors

$$\eta_{\text{moy}} = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{2P+\Delta P}{2}}{\frac{2D+\Delta D}{2}} = \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{\Delta P} \cdot \frac{2P + \Delta P}{2D + \Delta D}.$$

Lorsque $\Delta P \to 0$, alors

$$\lim_{\Delta P \to 0} \Delta D = \lim_{\Delta P \to 0} \left[D(P+\Delta P) - D(P)\right] = D(P+0) - D(P) = 0$$

(par continuité de D) et l'élasticité moyenne de la demande devient

$$\begin{aligned}
\eta &= \lim_{\Delta P \to 0} \eta_{\text{moy}} \\
&= \lim_{\Delta P \to 0} \left(\frac{D(P+\Delta P) - D(P)}{\Delta P} \cdot \frac{2P + \Delta P}{2D + \Delta D} \right) \\
&= \lim_{\Delta P \to 0} \frac{D(P+\Delta P) - D(P)}{\Delta P} \cdot \lim_{\Delta P \to 0} \frac{2P + \Delta P}{2D + \Delta D} \\
&= D'(P) \cdot \frac{2P}{2D} = D'(P) \cdot \frac{P}{D(P)}.
\end{aligned}$$

Cette expression représente l'**élasticité (instantanée) de la demande**.

La demande est parfaitement inélastique, inélastique, élastique, et parfaitement élastique selon que $|\eta|$ est 0, entre 0 et 1, supérieure à 1, et ∞.

Exemples: quantifier l'élasticité de la demande dans les cas suivants.

1. $D(P) = 100 - 4P$, $P = 12$;
2. $D(P) = \frac{200}{P+1}$, $P = 12$;
3. $D(P) = P^2$, $P = 12$;
4. $D(P) = \frac{P}{P+1}$, $P = 12$.

Solutions: il suffit tout simplement d'utiliser la formule pour η.

1. Dans ce cas, $D'(P) = -4$, d'où

$$\eta = -4 \cdot \frac{P}{100 - 4P} = 1 + \frac{25}{P - 25}.$$

   Lorsque $P = 12$, $\eta = -\frac{12}{13}$ et la demande est inélastique.

2. Dans ce cas, $D'(P) = -\frac{200}{(P+1)^2}$, d'où

$$\eta = -\frac{200}{(P+1)^2} \cdot \frac{P}{200/(P+1)} = -\frac{P}{P+1}.$$

   Lorsque $P = 12$, $\eta = -\frac{12}{13}$ et la demande est inélastique.

3. Dans ce cas, $D'(P) = 2P$, d'où

$$\eta = 2P \cdot \frac{P}{P^2} = 2.$$

Lorsque $P = 12$, $\eta = 2$ et la demande est élastique.

4. Dans ce cas, $D'(P) = \frac{1}{(P+1)^2}$, d'où

$$\eta = \frac{1}{(P+1)^2} \cdot \frac{P}{P/(P+1)} = \frac{1}{P+1}.$$

Lorsque $P = 12$, $\eta = \frac{1}{13}$ et la demande est inélastique.

Voici certain biens et l'élasticité de leur demande (Mansur, Whalley, 1994).

Bien	η
Métaux	1.52
Meubles	1.26
Automobiles	1.14
Services professionels	1.09
Transports	1.03
Électricité	0.98
Huile	0.91
Boissons	0.78
Tabac	0.61
Vêtements	0.49
Livres	0.34
Charbon	0.32

Résumé

Exercices suggérés