MAT 1700
Méthodes mathématiques I

Chapitre 10
Les fondements du calcul à plusieurs variables

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2021

Aperçu

Scénario – Les gugusses et les gogosses

Exemple: la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés (en milliers de dollars) par l'expression

$$81 + 16xy - x^4 - y^4,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mesuellement (en milliers d'unités).

Combien d'article de chaque sorte doit-elle vendre afin de maximiser ses profits, si la vente de chaque article ne peut dépasser 3000 unités par mois?

Solution: on cherche à maximiser la fonction

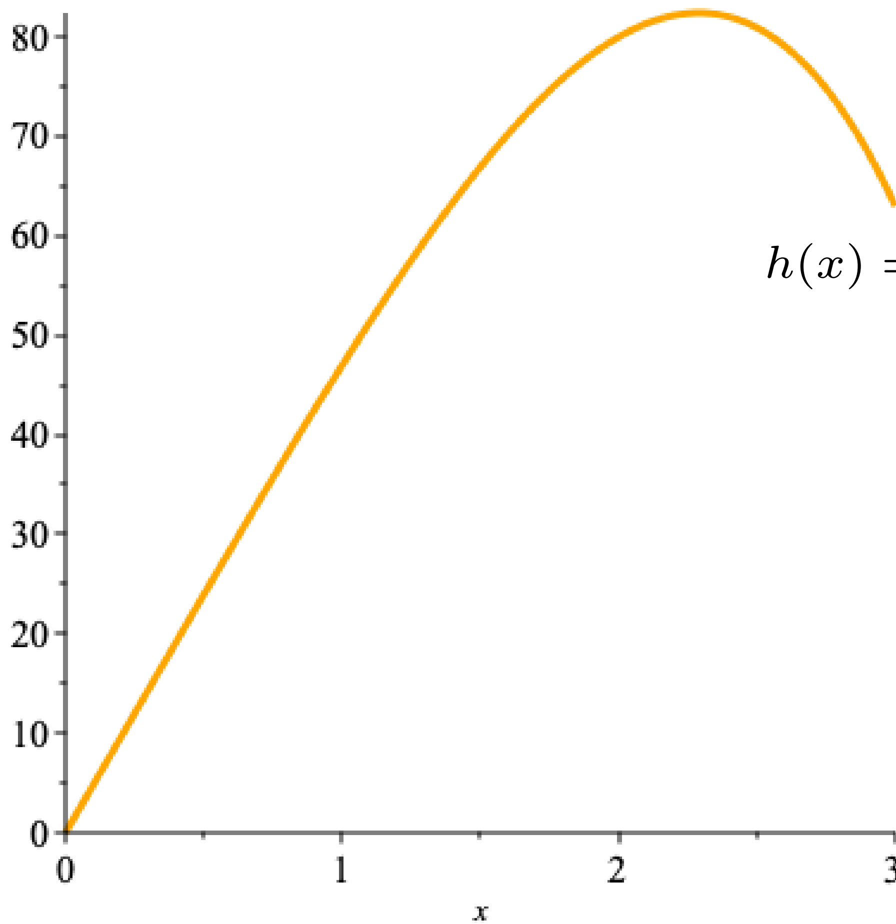
$$P = P(x, y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4,$$

soumise aux restrictions $0 \leq x \leq 3$ and $0 \leq y \leq 3$.

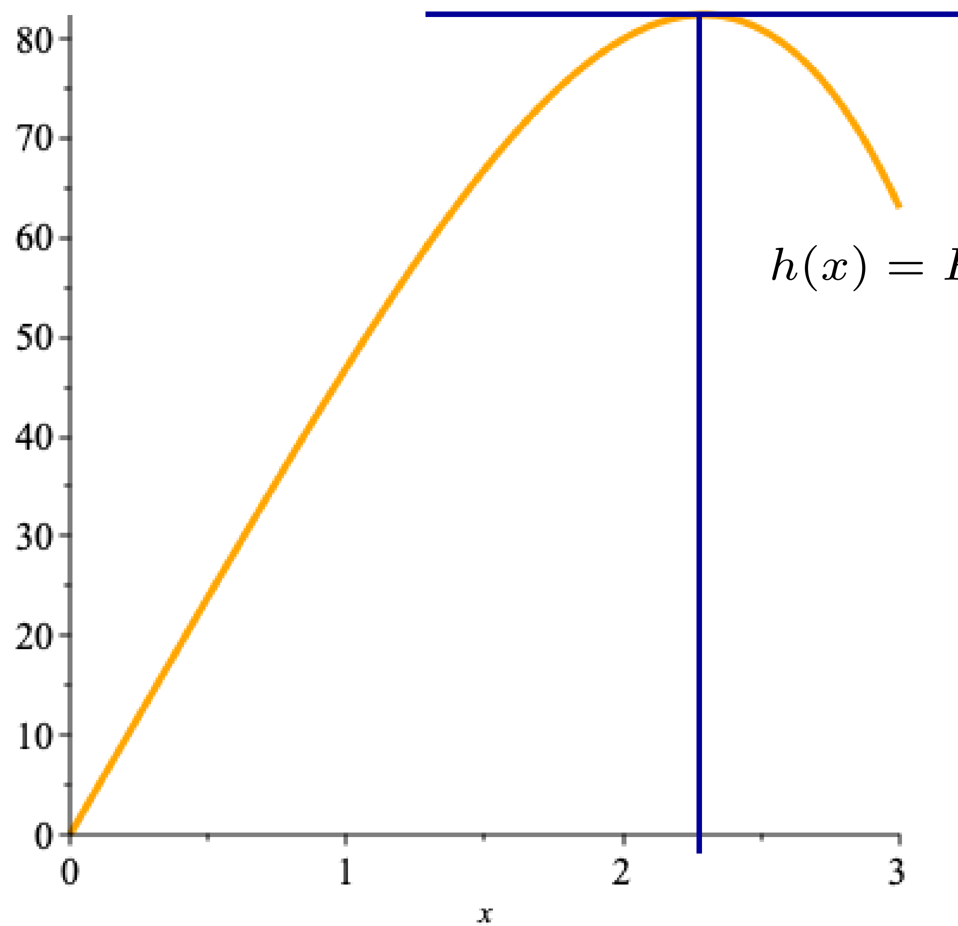
⚠ **La marche à suivre présentée au chapitre 6 ne peut-être utilisée directement puisque les ventes de gugusses et de gogosse ne sont pas reliées: il est donc impossible d'éliminer une des variables.**

Si $Cie.\ Inc.$ s'attend à vendre 3000 gogosses ($y = 3$ est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$h(x) = P(x, 3) = 81 + 16 \cdot 3x - 3^4 - x^4 = 48x - x^4.$$



$$h(x) = P(x, 3) = 48x - x^4$$



$$h(x) = P(x, 3) = 48x - x^4$$

Puisque $h'(x) = 48 - 4x^3$, le seul point critique de $h(x)$ est $x = 12^{1/3} \approx 2.29$. On ajoute les bornes $x = 0$ et $x = 3$, et on obtient le tableau suivant:

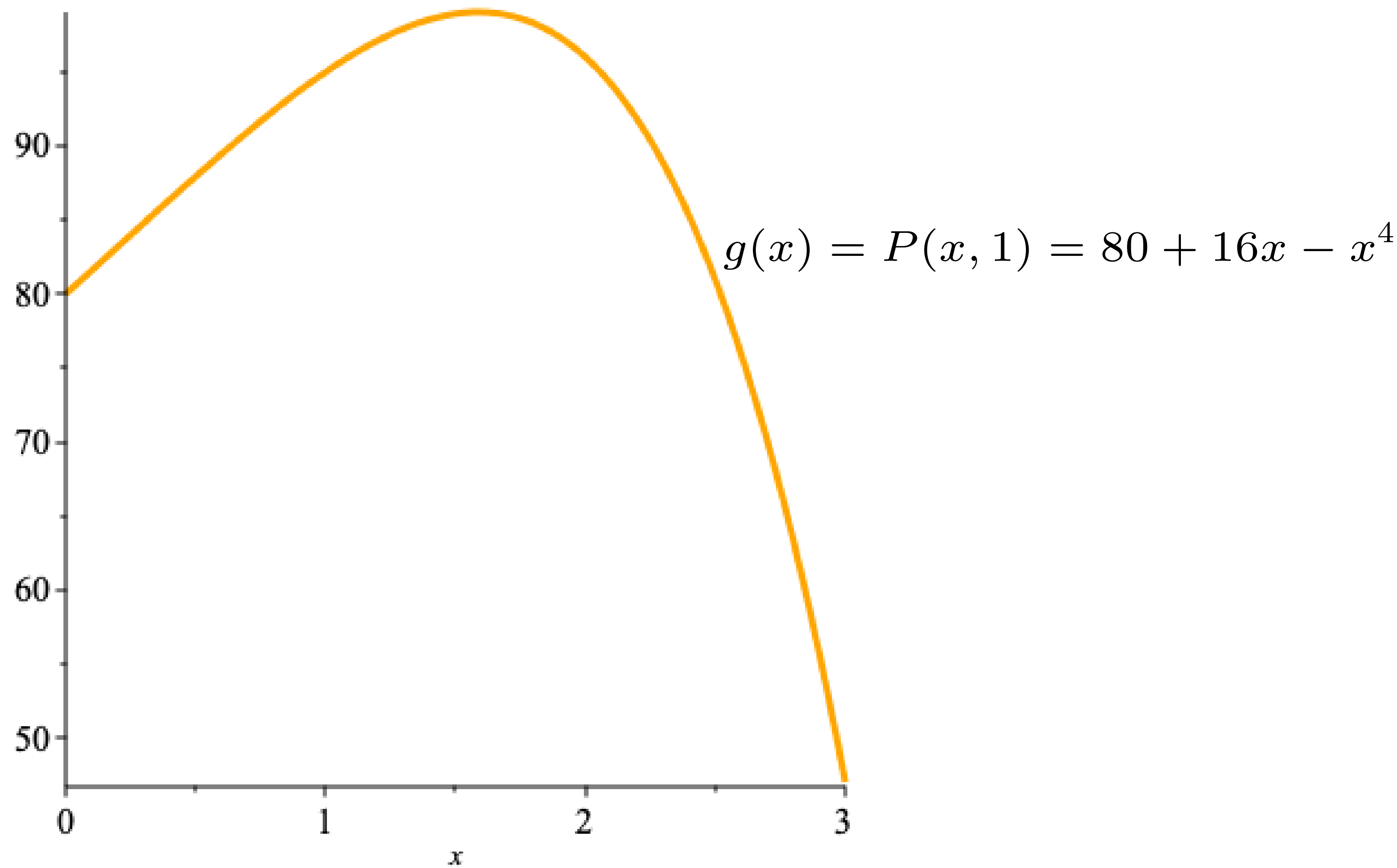
x	0	$12^{1/3}$	3
$h(x)$	0	≈ 82.42	63

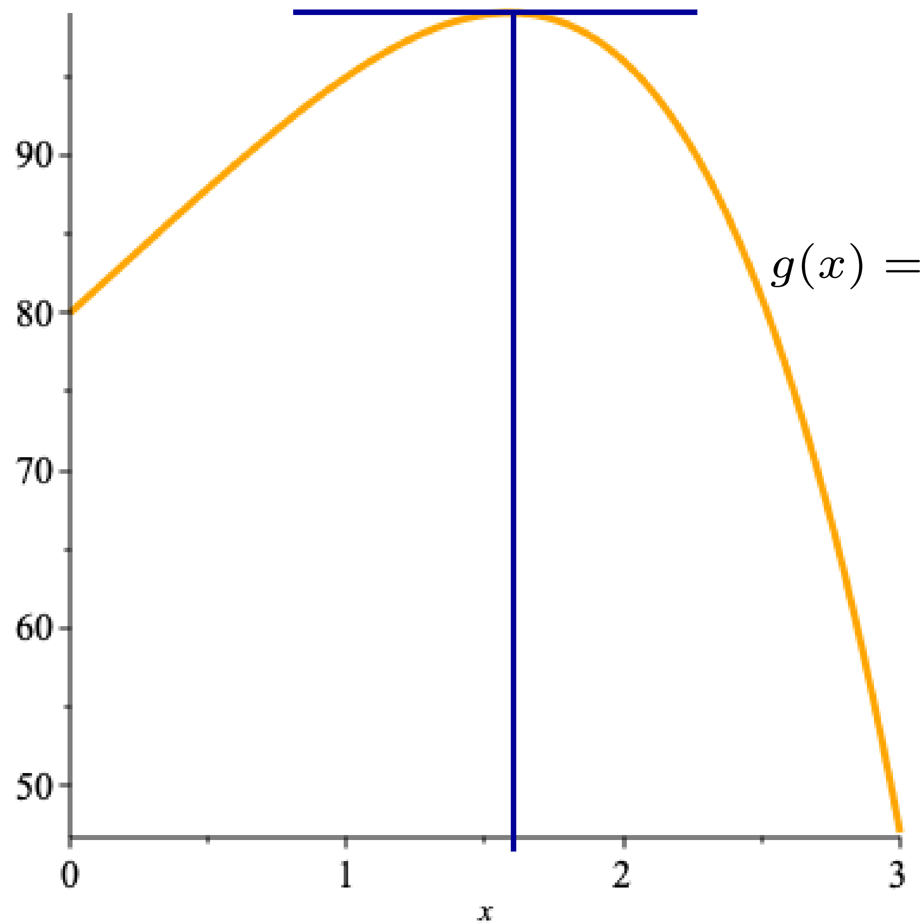
Ainsi, h admet un maximum en $x = 12^{1/3} \approx 2.29$.

Est-ce que c'est aussi un maximum de P?

Si, au lieu, *Cie. Inc.* s'attend à vendre 1000 gogosses ($y = 1$ est fixe), le profit réalisé par l'entreprise est

$$g(x) = P(x, 1) = 81 + 16x - 1 - x^4 = 80 + 16x - x^4.$$


90
80
70
60
50
0
1
2
3
x
$g(x) = P(x, 1) = 80 + 16x - x^4$



$g(x) = P(x, 1) = 80 + 16x - x^4$

Puisque $g'(x) = 16 - 4x^3$, le seul point critique de $g(x)$ est $x = 4^{1/3} \approx 1.59$. On ajoute les bornes $x = 0$ et $x = 3$, et on obtient le tableau suivant:

x	0	$4^{1/3}$	3
$g(x)$	80	≈ 99.05	47

Ainsi, $g(x)$ admet un maximum en $x = 4^{1/3} \approx 1.59$.

Puisque $P(4^{1/3}, 1) > P(12^{1/3}, 3)$, P n'atteint pas sa valeur maximale lorsque $x = 12^{1/3}$ et $y = 3$.

⚠ **Il est temptant d'en conclure que le maximum est alors atteint en $x = 4^{1/3}$ et $y = 1$, mais on peut s'imaginer choisir un autre y, et trouver un maximum encore plus élevé.**

Nous ne somme donc pas encore en mesure de répondre à la question. Nous y reviendrons.

10.1 – Les fonctions de plusieurs variables

En général, une quantité d'intérêt est affectée par plus d'une variable: le prix d'une maison, par exemple, est fonction des taux d'intérêts, du temps de l'année, du quartier, etc.

On ne peut pas appliquer tels quels les concepts du calcul à une variable (cf. scénario au début du chapitre).

Si $n \in \mathbb{N}^\times$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des $n-$**tuples de nombres réels**:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

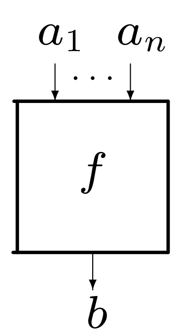
Ainsi $\mathbb{R}^1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$ représente une **droite**, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ un **plan**, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ l'**espace à** 3 **dimensions**, etc.

Une **fonction de n variables** est une règle associant un nombre unique à chaque élément de $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

- l'ensemble des points où la fonction est bien définie est son **domaine** D_f;
- l'ensemble des valeurs que prend la fonction est son **image** I_f.

Si $f : A \to B$ est fonction de n variables, on dénote sa règle par

$$b = f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{ou}$$



Exemples: considérons les fonctions à 2 variables suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$:
   - $D_f = \mathbb{R}^2$, puisque $x + y$ existe pour toute paire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
   - $I_f = \mathbb{R}$, puisque $f(x,0) = x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sqrt{x-y}$:
   - $D_g = \{(x,y) | x - y \geq 0\}$, puisque $\sqrt{x-y}$ n'existe que si $x - y \geq 0$;
   - $I_g = [0, +\infty)$, puisque $g(x^2, 0) = \sqrt{x^2 - 0} = x$ pour tout $x \geq 0$.

3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$:
   - $D_h = \{(x,y) | (x,y) \neq (0,0)\}$, puisque $\frac{1}{x^2+y^2}$ existe si $(x,y) \neq (0,0)$;
   - $I_h = (0, +\infty)$, puisque $h(x^{-1/2}, 0) = \frac{1}{(x^{-1/2})^2+0} = x$ pour tout $x > 0$.

4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$:

- $D_k = \mathbb{R}^2$, puisque $e^{-(x^2+y^2)}$ existe pour toute pire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- $I_k = [-1, 0)$, puisque $0 < e^{-\mu} \leq 1$ pour tout $\mu = x^2 + y^2 \geq 0$.

La différence conceptuelle entre $n = 1$ et $n = 2$ est beaucoup plus prononcée que celle entre $n = 2$ et $n > 2$. Pour cette raison, on se concentre sur les fonctions à 2 variables.

Le graphique d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$; celle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(x, y).$$

Les points de cette surface sont de la forme $P(a, b, f(a, b))$, où $(a, b) \in D_f$.

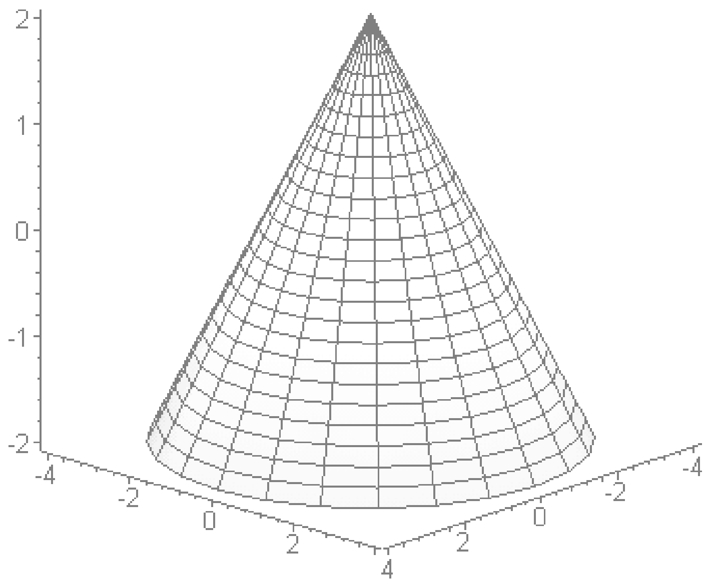
Par exemple, la surface définie par $z = x^2 - y$ est l'ensemble

$$\{(x, y, x^2 - y) : x, y, \in \mathbb{R}\}.$$

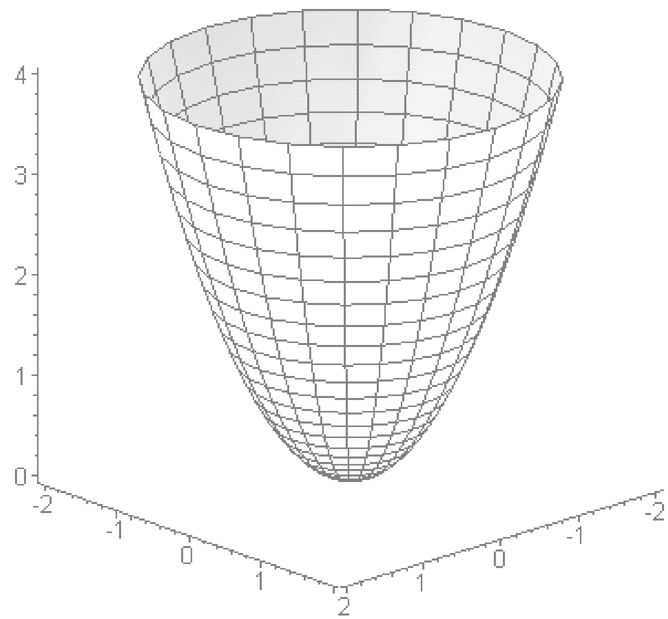
Ainsi $P(3, 1, 8)$ est sur la surface puisque $3^2 - 1 = 8$, tandis que $Q(3, 1, -2)$ ne l'est pas puisque $3^2 - 1 \neq -2$.

⚠ **Il n'est pas évident de tracer une surface à la main.**

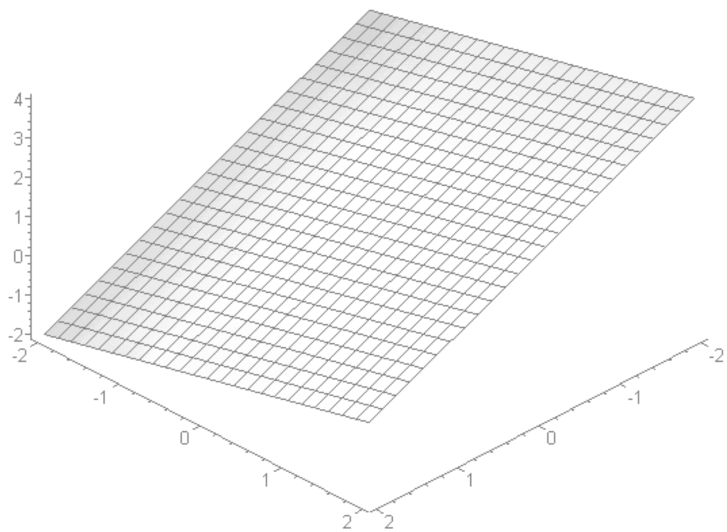
Exemples: voici les graphiques de quelques surfaces $z = f(x, y)$, ainsi que les points saillants de ces dernières.



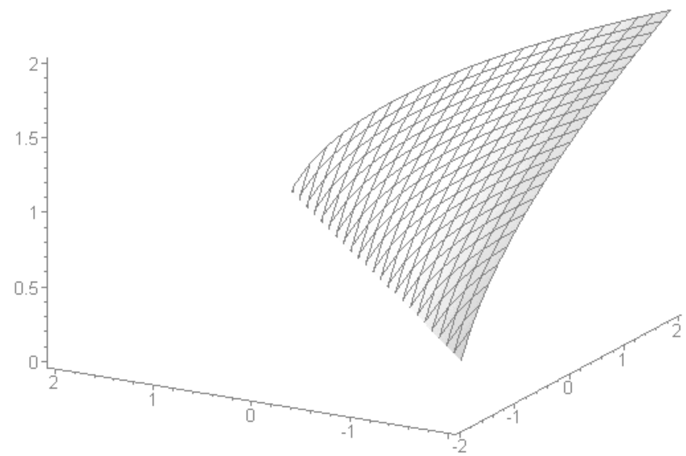
cône: $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$
domaine: $\mathbb{R}^2$
image: $(-\infty, 2]$
maximum atteint en $(x, y) = (0, 0)$



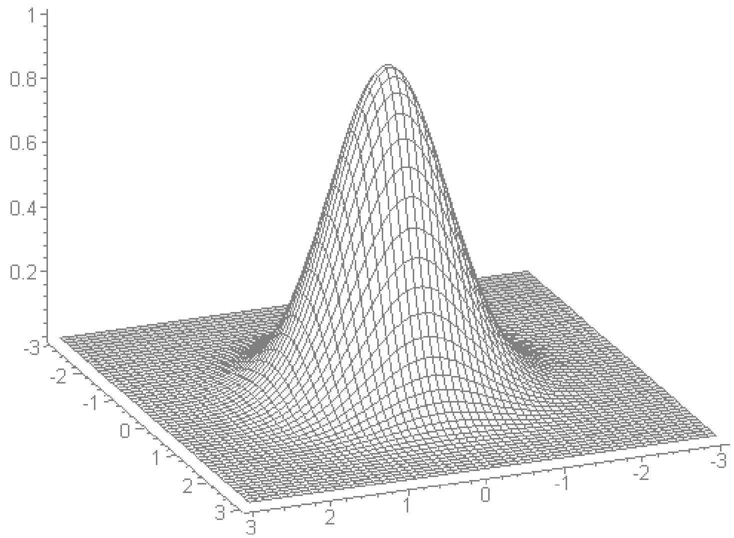
paraboloïde: $z = x^2 + y^2$
domaine: $\mathbb{R}^2$
image: $[0, +\infty)$
minimum atteint en $(x, y) = (0, 0)$



plan: $z = \frac{1}{2}y - x + 1$
domaine: $\mathbb{R}^2$
image: $\mathbb{R}$
aucun min/max



surface: $z = \sqrt{x - y}$
domaine: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$
image: $[0, +\infty)$
minimum atteint sur la droite $y = x$



surface: $z = e^{-(x^2+y^2)}$
domaine: $\mathbb{R}^2$
image: $(0, 1]$
maximum atteint en $(x, y) = (0, 0)$

10.2 – Les dérivées partielles

Rappel: soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction d'une variable. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la dérivée de f en x est

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

si cette limite existe – la variable indépendante varie de x à $x+h$ dans le quotient différentiel.

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, il y a beaucoup plus de jeu: on peut faire varier n'importe quelle combinaison de variables indépendantes dans le quotient différentiel.

Lorsque $n \geq 2$, une fonction peut avoir une infinité de **dérivées directionnelles** en un point (une dans chaque direction, en fait); ce n'est définitivement pas le cas lorsque $n = 1$.

Nous n'abordons pas ce sujet fondamental de la théorie du calcul multi-variables, à une exception près.

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. La **dérivée partielle** de f par rapport à x_i est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h},$$

tant que cette limite existe; il se trouve que f_{x_i} est la dérivée directionnelle de f en direction de l'axe x_i.

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(x, y)$, si $f(x, y) = x^2y$;

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(x,y)$, si $f(x,y)=x^2y$;

   Solution: en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y-x^2y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{y\left((x+h)^2-x^2\right)}{h} = y\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= y\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = y\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\
&= y\cdot\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2xy.
\end{aligned}$$

2. $g_y(x, y)$, si $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

2. $g_y(x,y)$, si $g(x,y) = \frac{x}{y}$.

Solution: en utilisant la définition, on obtient

$$\begin{aligned} g_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x,y+h) - g(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{y+h} - \frac{x}{y}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{xh}{(y+h)y}}{h} \\ &= -x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{(y+h)yh} \\ &= -x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{(y+h)y} = -x \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

⚠ **Lorsque l'on dérive par rapport à une variable, on peut se servir des règles du chapitre 5, tant que l'on traîte toutes les autres variables comme des constantes.**

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_x(3,1)$, si $f(x,y) = (x-1)^2y$;
2. $g_y(1,1)$, si $g(x,y) = x/y$;
3. $h_x(x,y)$, si $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$;
4. $h_y(0,0)$, si $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$;
5. $k_y(x,y)$, si $k(x,y) = x\ln(xy)$;
6. $k_x(-1,-1)$, si $k(x,y) = x\ln(xy)$.

Solutions: on utilise les règles des chapitres précédents.

1. Puisque nous dérivons par rapport à x, y est une constante. Ainsi

$$f_x(x,y) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left((x-1)^2\right) = y(2(x-1)) = 2(x-1)y$$

et $f_x(3,1) = 2(3-1)(1) = 4$.

2. Puisque nous dérivons par rapport à y, x est une constante. Ainsi

$$g_y(x,y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

et $g_y(1,1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

3. Puisque nous dérivons par rapport à x, y est une constante. Ainsi

$$h_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(-(x^2+y^2)\right) = e^{-(x^2+y^2)}(-2x+0) = -2xe^{-(x^2+y^2)}.$$

4. Puisque nous dérivons par rapport à y, x est une constante. Ainsi

$$h_y(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(-(x^2+y^2)\right) = e^{-(x^2+y^2)}(0-2y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

et $h_y(0,0) = -2(0)e^{-(0^2+0^2)} = 0$.

5. Puisque nous dérivons par rapport à y, x est une constante. Ainsi

$$k_y(x,y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{x}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}.$$

6. Puisque nous dérivons par rapport à y, y est une constante. Ainsi

$$\begin{aligned} k_y(x,y) &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy)) + \frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot \ln(xy) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + 1 \cdot \ln(xy) \\ &= \frac{x}{xy} \cdot y + \ln(xy) = 1 + \ln(xy) \end{aligned}$$

et $k_x(-1,-1) = 1 + \ln\left((-1)(-1)\right) = 1 + \ln 1 = 1.$

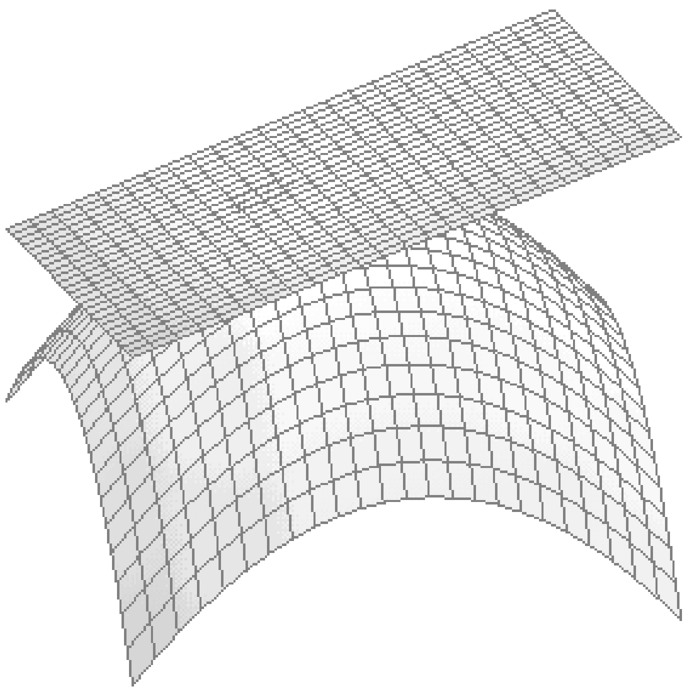
10.3 – Le plan tangent

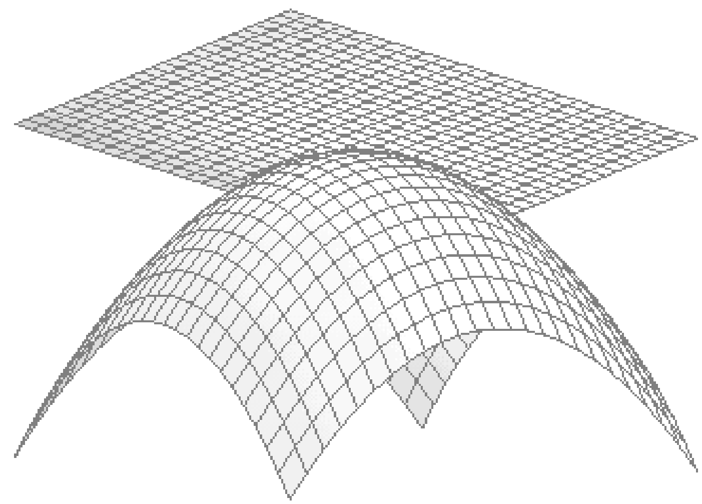
On a vu au chapitre 5 que l'équation de l'unique droite tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a), \quad \text{si } f'(a) \text{ existe.}$$

En général, la surface $z = f(x,y)$ possède une infinité de droite tangente au point $P(a,b,f(a,b))$; toutes ces droites se retrouvent dans un même plan, le **plan tangent** à la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $P(a,b,f(a,b))$.

C'est le plan qui repose sur la surface en ne la touchant qu'au **point de tangence**. Si un tel plan existe et que les dérivées partielles sont définies, la surface est **différentiable** ou **dérivable** en $P(a,b,f(a,b))$.





Près du point de tangence, la surface ressemble au plan tangent: c'est en partie pourquoi il y a encore des zozos pour croire que la Terre est plate!

Soit $z = f(x, y)$ une surface dérivable en $P(a, b, f(a, b))$. L'équation du plan tangent à la surface au point P est

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Exemples: déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(a, b, f(a, b))$ dans les cas suivants.

1. $f(x, y) = -1 + x^2 + y^2$, $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;

2. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P(1, 0, e^{-1})$;

3. $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, $P(2, 1, 1)$;

4. $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(0, 1, 1)$.

Solutions: on utilise directement la formule.

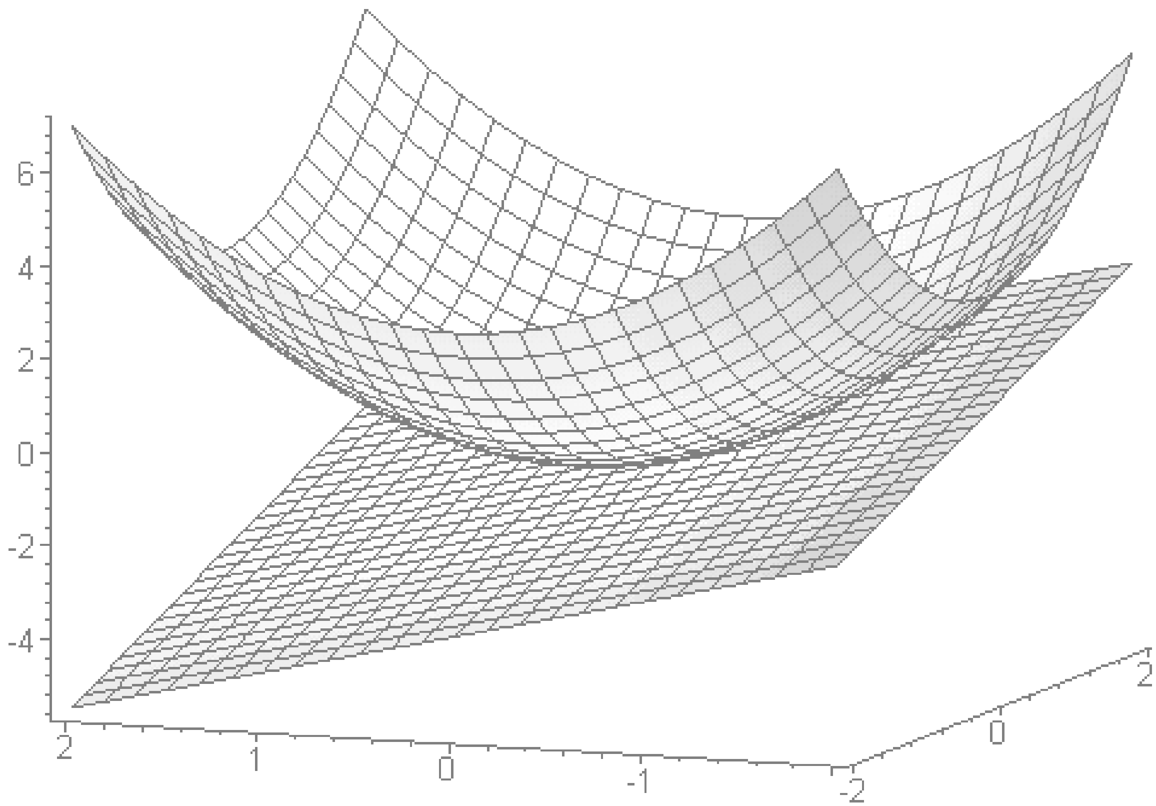
1. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = -1 + a^2 + b^2 = -\frac{1}{2}$, ce qui est le cas.

   Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P:

$$f_x(x, y) = 0 + 2x + 0 = 2x \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = 0 + 0 + 2y = 2y \implies$$
$$f_x(a, b) = f_x(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1 \text{ et } f_y(a, b) = f_y(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1,$$

   et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + f_x(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + f_y(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})(y + \tfrac{1}{2}) \\ &= -\tfrac{1}{2} + 1(x - \tfrac{1}{2}) - 1(y + \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{2} + x - y. \end{aligned}$$


6
4
2
0
-2
-4
2
1
0
-1
-2
0
2

2. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 1$ et $b = 0$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = e^{-(a^2+b^2)} = e^{-1}$, ce qui est le cas.

   Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P:

   $$f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} \implies$$
   $$f_x(a, b) = f_x(1, 0) = -2(1)e^{-(1^2+0^2)} = -2e^{-1} \text{ et } f_y(a, b) = f_y(1, 0) = 0,$$

   et l'équation du plan tangent est

   $$\begin{aligned} z &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= e^{-1} - 2e^{-1} \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) = e^{-1}(3 - 2x). \end{aligned}$$

3. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 2$ et $b = 1$, cela revient à vérifier que $f(a,b) = \sqrt{a-b} = 1$, ce qui est le cas.

   Ensuite, on calcule les dérivées partielles en P:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \quad \text{et} \quad f_y(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \implies$$

$$f_x(a,b) = f_x(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \text{ et } f_y(a,b) = f_y(2,1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-1}} = -\frac{1}{2},$$

   et l'équation du plan tangent est

$$z = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) = \frac{1}{2}(1+x-y).$$

4. On commence par vérifier que P se retrouve sur la surface. Puisque $a = 0$ et $b = 1$, cela revient à vérifier que $f(a, b) = 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, ce qui est le cas.

   Ensuite, on calcule les dérivées partielles:

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies$$

$$f_x(a, b) = f_x(0, 1) = 0 \text{ et } f_y(a, b) = f_y(0, 1) = -1,$$

   et l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(0, 1) + f_x(0, 1)(x - 0) + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= 1 + 0 \cdot (x - 0) - 1(y - 1) = 2 - y. \end{aligned}$$

10.4 – L'optimisation à deux variables

Les **points critiques** de $f(x, y)$ sont les paires $(a, b) \in D_f$ telles que

1. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, ou

2. au moins une des dérivées partielles $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ n'existe pas.

Exemples: déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x + y$;
2. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
3. $f(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$;
4. $f(x, y) = (x - 1)^2 y$.

Solutions:

1. Puisque $f_x(x, y) = 1$ et $f_y(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ n'a pas de point critique.

2. Puisque $f_x(x, y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$ et $f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f(x, y)$ n'a pas de point critique. **Note:** $(0, 0) \notin D_f$; ce n'est donc pas un point critique.

3. Puisque $f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$ et $f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$, $f(x, y)$ n'admet qu'un point critique, en $(0, 0)$.

4. Puisque $f_x(x, y) = 2(x - 1)y$ et $f_y(x, y) = (x - 1)^2$, $f(x, y)$ admet des points critiques en $(1, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Une fonction $f(x,y)$ est **dérivable d'ordre deux** en $(x,y)=(a,b)$ si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

existent lorsque $(x,y)=(a,b)$.

Exemples: déterminer les dérivées partielles indiquées.

1. $f_{xy}(3,1)$, si $f(x,y)=(x-1)^2y$;
2. $g_{yy}(1,1)$, si $g(x,y)=\frac{x}{y}$;
3. $k_{xy}(x,y)$, si $k(x,y)=x\ln(xy)$;
4. $k_{yx}(x,y)$, si $k(x,y)=x\ln(xy)$.

Solutions: on utilise les résultats des exemples en pp. 22-25.

1. Puisque $f_x(x,y) = 2(x-1)y$, alors $f_{xy}(x,y) = 2(x-1)$ et
$$f_{xy}(3,1) = 2(3-1) = 4.$$

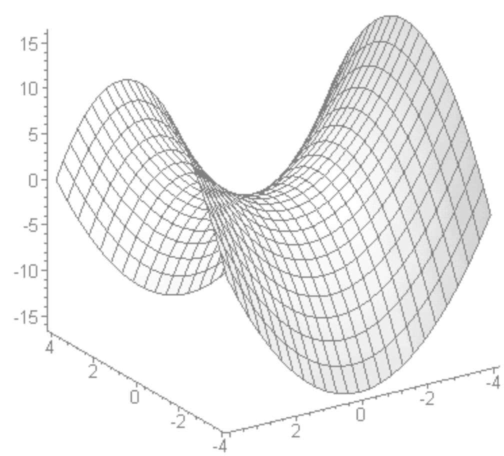
2. Puisque $g_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$, alors $g_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}$ et $g_{yy}(1,1) = \frac{2(1)}{1^3} = 2$.

3. Puisque $k_x(x,y) = 1 + \ln(xy)$, alors
$$k_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)) + 0 = \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}.$$

4. Puisque $k_y(x,y) = \frac{x}{y}$, alors $k_{yx}(x,y) = \frac{1}{y}$.

⚠ **Dans ce qui précède, on voit que $k_{xy} = k_{yx}$. Les dérivées mixtes ne sont pas toujours égales, mais elles le sont pour plusieurs fonctions. Dans cette section, on suppose que c'est le cas.**

Soit (a, b) un point critique de f. Si $f(x, y)$ n'atteint pas un maximum ou un minimum relatif en (a, b), le point critique (a, b) est un **point de selle** de $f(x, y)$; c'est l'analogue multi-dimensionnel du point d'inflexion.



Dans certains cas, le **théorème de la dérivée seconde** nous permet d'identifier si une fonction admet un minimum relatif, un maximum relatif, ou encore un point de selle en ses points critiques.

Théorème: soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable d'ordre 2 et (a, b) un de ses points critiques. Supposons que

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 \neq 0$$

- Si $D > 0$ et $f_{xx}(a,b) > 0$, alors f atteint un min. relatif au point (a,b).
- Si $D > 0$ et $f_{xx}(a,b) < 0$, alors f atteint un max. relatif au point (a,b).
- Si $D < 0$, alors (a,b) est un point de selle de f.

Exemples: classifier les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$;
2. $g(x, y) = x^2 - y^2$;
3. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$;
4. $k(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solutions: on utilise le théorème de la dérivée seconde et divers résultats obtenus lors des exemples de ce chapitre.

1. Le point $(0,0)$ est le seul point critique de $f(x,y)$. Puisque

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad f_{xy}(x,y) = 0,$$

alors $D = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$; comme $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, $f(x,y)$ atteint un minimum relatif à $(0,0)$.

2. Le point $(0,0)$ est le seul point critique de $g(x,y)$. Puisque

$$g_{xx}(x,y) = 2, \quad g_{yy}(x,y) = -2 \quad \text{et} \quad g_{xy}(x,y) = 0,$$

alors $D = g_{xx}(0,0)g_{yy}(0,0) - (g_{xy}(0,0))^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$; ainsi $(0,0)$ est un point de selle de $g(x,y)$.

3. Le point $(0,0)$ est le seul point critique de $h(x,y)$.

   Puisque $h_{xy}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$,

   $$h_{xx}(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2-1) \quad \text{et} \quad h_{yy}(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2-1),$$

   alors

   $$D = h_{xx}(0,0)h_{yy}(0,0) - (h_{xy}(0,0))^2 = \left(2e^0(2(0)-1)\right)^2 - 0^2 = 4 > 0;$$

   comme $h_{xx}(0,0) = -2 < 0$, $h(x,y)$ atteint un maximum relatif à $(0,0)$.

4. Le théorème de la dérivée seconde ne peut être utilisé dans ce cas puisque les dérivées partielles de $k(x,y)$ ne sont pas définies au point critique $(0,0)$ (c'est un maximum absolu, soit dit en passant).

Il existe également un résultant nous permettant d'identifier les valeurs extrêmes d'une fonction sur une région (compacte); c'est la généralisation de la marche à suivre du chapitre 6.

Théorème: soient $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et A une région bornée du plan s'exprimant à l'aide d'inégalités de type $\leq$. Alors, les valeurs extrêmes de f sont atteintes soit en un point critique $(x_*, y_*) \in A$, soit sur la frontière ∂A.

On optimise donc f en trouvant tous les points critiques dans A, en évaluant f en ces points, et en évaluant f sur la frontière.

Exemple (reprise): la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x,y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y <\leq 3,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mesuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

Exemple (reprise): la compagnie *Cie. Inc.* produit des gugusses et des gogosses. Ses profits mensuels sont exprimés par

$$f(x,y) = 81 + 16xy - x^4 - y^4, \quad 0 \leq x, y \leq 3,$$

où x et y représentent respectivement le nombre de gugusses et de gogosses vendus mesuellement (en milliers d'unités).

Comment peut-elle maximiser ses profits?

Solution: on cherche à maximiser $f(x,y)$, lorsque $0 \leq x, y \leq 3$. Les dérivée partielles de f sont

$$f_x(x,y) = 16y - 4x^3, \qquad f_y(x,y) = 16x - 4y^3,$$

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2, \qquad f_{yy}(x,y) = -12y^2, \qquad f_{xy}(x,y) = 16.$$

Les dérivées partielles sont définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques de f satisfont donc à $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, c'est-à-dire à

$$16y - 4x^3 = 0 \quad \text{et} \quad 16x - 4y^3 = 0.$$

Soit (x, y) un tel point. Alors $16x - 4y^3 = 0$, d'où $x = \frac{1}{4}y^3$. Puisque les deux équations doivent étre satisfaıtes simultanément, on obtient

$$16y - 4x^3 = 16y - 4\left(\frac{1}{4}y^3\right)^3 = 16y - \frac{1}{16}y^9 = \frac{1}{16}y\left(256 - y^8\right) = 0.$$

Ainsi, $y = 0$ ou $y^8 - 256 = 0$. Mais

$$y^8 - 256 = (y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)(y^4 + 16),$$

d'où $y = 0, \pm 2$. Puisque y doit être non-négatif, on rejette $y = -2$.

Lorsque $y = 2$, $x = \frac{1}{4}2^3 = 2$; lorsque $y = 0$, $x = \frac{1}{4}0^3 = 0$. Les seul points critiques d'intérêt se retrouvent donc en $(x, y) = (0, 0)$ et $(2, 2)$.

Selon le théorème de la dérivée seconde,

$$D = f_{xx}(2,2)f_{yy}(2,2) - (f_{xy}(2,2))^2 = \left(-12(2)^2\right)^2 - 16^2 = 2048 > 0$$

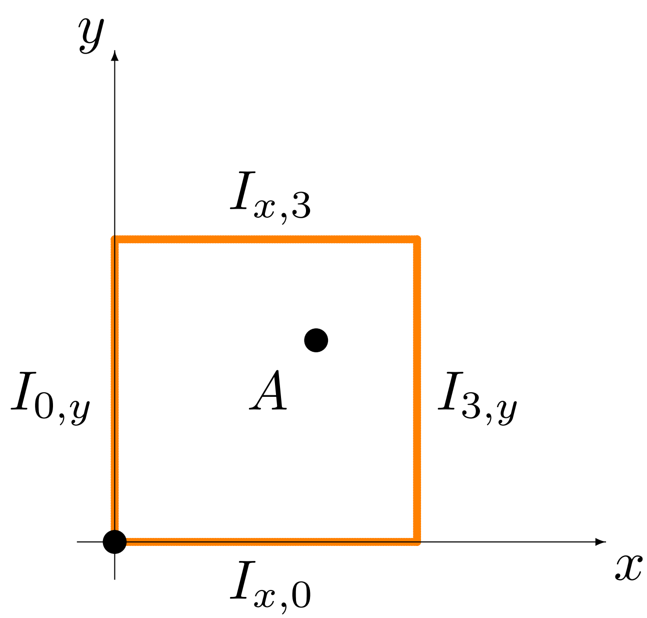
et $f_{xx}(2, 2) = -12(2)^2 - 48 < 0$, d'où $f(x, y)$ admet un maximum relatif à $(2, 2)$; on a aussi $D(0, 0) = 0 \cdot 0 - 16^2 < 0$, d'où $(0, 0)$ est un point de selle.

⚠ **Si la fonction n'avait qu'un point critique en $(2, 2)$, on pourrait directement conclure que *Cie. Inc.* maximise ses profits si elle vend 2000 gugusses et 2000 gogosses par mois.**

⚠ **Mais il y a plus d'un point critique: on doit alors aussi vérifier ce que si passe sur la frontière du domaine.**

Puisque $A = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 3\}$, la frontière ∂A consiste en 4 segments

$$I_{x,0} = \{(x, 0); 0 \leq x \leq 3\}, I_{x,3} = \{(x, 3); 0 \leq x \leq 3\},$$
$$I_{0,y} = \{(0, y); 0 \leq y \leq 3\}, I_{3,y} = \{(3, y); 0 \leq y \leq 3\}.$$



- En $(x, y) = (2, 2)$, f prend la valeur $81 + 16(2)(2) - 2^4 - 2^4 = 113$, en $(x, y) = (0, 0)$, f prend la valeur $81 + 16(0)(0) - 0^4 - 0^4 = 81$;

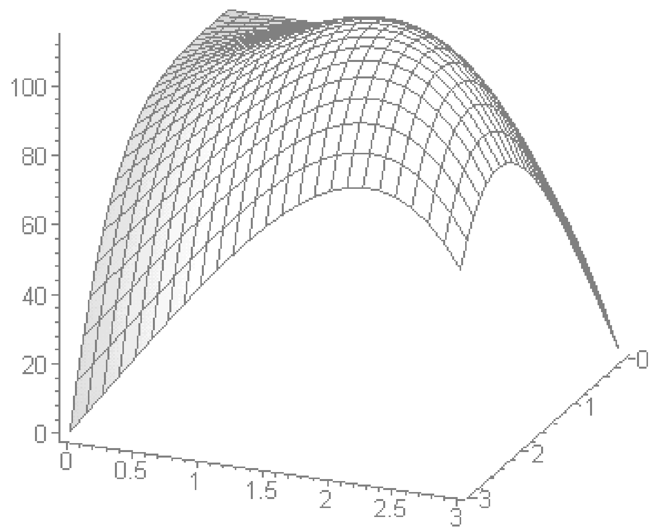
- sur $I_{x,0}$, la fonction devient $f(x, 0) = 81 + 16x \cdot (0) - x^4 - 0^4 = 81 - x^4$, pour $0 \leq x \leq 3 \implies$ valeur maximale est 81;

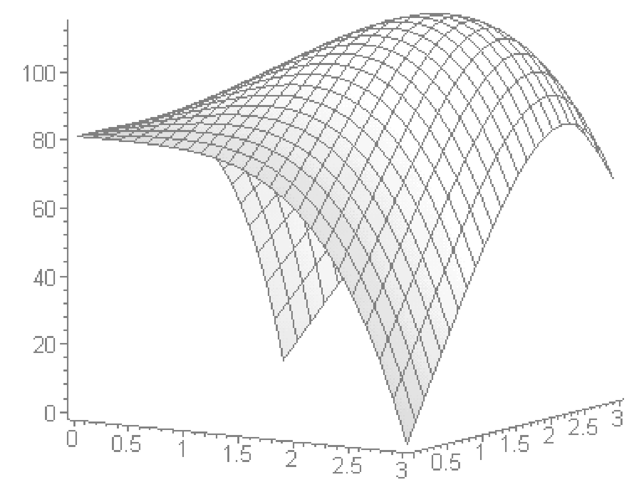
- sur $I_{x,3}$, la fonction devient $f(x, 3) = 81 + 16x \cdot (3) - x^4 - 3^4 = 48x - x^4$, pour $0 \leq x \leq 3 \implies$ valeur maximale est ≈ 82.42 (scénario 6);

- sur $I_{0,y}$, la fonction devient $f(0, y) = 81 + 16y \cdot (0) - 0^4 - y^4 = 81 - y^4$, pour $0 \leq y \leq 3 \implies$ valeur maximale est 81;

- sur $I_{3,y}$, la fonction devient $f(3, y) = 81 + 16y \cdot (3) - 3^4 - y^4 = 48y - y^4$, pour $0 \leq y \leq 3 \implies$ valeur maximale est ≈ 82.42 (scénario 6);.

La valeur maximale globale (113) est donc bien obtenue en $(2, 2)$.





On a sacrifié plusieurs aspects importants de la théorie et des applications dans cette brève introduction, afin de vous donner un avant-gout du calcul multi-variables; vous aurez la chance d'approfondir vos connaîssances dans le cadre d'un cours subséquent.

Résumé

Exercices suggérés