Question 14

Pente de la droite tangente à la courbe $y = x + x^3 = f(x)$ au point $(2, 10)$

Pente de la droite tangente à $f(x)$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$
$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x+h) = (x+h) + (\overset{a}{x} + \overset{b}{h})^3$$
$$= x + h + x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

On demande la pente de la tanjente au point $(2, 6)$,

donc $x = 2$

$$f(x+h) = f(2+h) = 2+h+2^3+3\cdot 2^2 h+3\cdot 2\cdot h^2+h^3$$

$$= 2+h+8+12h+6h^2+h^3$$

$$= 10+13h+6h^2+h^3$$

$$f(x) = f(2) = 2+2^3 = 2+8 = 10$$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10+13h+6h^2+h^3-10}{h}$$

$\hookrightarrow 0$, on ne peut pas diviser par 0

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h + 6h^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(13 + 6h + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 13 + 6h + h^2$$

$$m = 13 + 6 \cdot 0 + 0^2 = \boxed{13}$$ ← pente de la tangente à la courbe $y = x + x^3$ au point $(2, 6)$

Question 15

Pente de la droite tangente à la courbe $y = \underbrace{\sqrt{x+1}}_{F(x)}$ au point $(0,1)$

Pente de la droite tangente à $F(x)$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - F(x)}{h}$$

- $f(x+h) = \sqrt{x+h+1}$

  $(0,1) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x+h) = \sqrt{0+h+1} = \sqrt{h+1}$

- $F(x) = f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1 \to 0}{h \to 0}$$

$\frac{0}{0}$ ← Forme indéterminée

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\overbrace{\sqrt{h+1}}^{a} - \overbrace{1}^{b})(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+1})^2 - 1^2}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Question 16

Démontrer que la droite tangente à la courbe $y = x^3$ au point (a, a^3) n'intersecte la courbe qu'à un seul autre point.

Donner les coordonnées du point d'intersection

Première étape : Equation de la droite tangente

$$y = mx + b$$

pente ordonnée à l'origine

Pente de la droite tangente à $F(x)$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - F(x)}{h}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$(a, a^3) \Rightarrow x = a$$

$$f(x+h) = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

$$f(x) = a^3$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h \to 0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3a^2 + \underbrace{3ah}_{\to 0} + \underbrace{h^2}_{\to 0} = \boxed{3a^2 = m}$$

?

$$y = 3a^2 x + b$$

$(\underbrace{a}_{x}, \underbrace{a^3}_{y})$ est sur la droite

$$a^3 = 3a^2 \cdot a + b = 3a^3 + b$$

$$\Rightarrow \quad b = a^3 - 3a^3 =$$

$$\boxed{b = -2a^3}$$

Donc, l'équation de la droite tangente à la courbe $y = x^3$ passant par le point (a, a^3) est :

$$y = \underbrace{3a^2}_{m} x - \underbrace{2a^3}_{b}$$

Deuxième étape : points d'intersections

On cherche les points d'intersection de la courbe $y = x^3$ avec la courbe $y = 3a^2x - 2a^3$

Il faut résoudre $3a^2x - 2a^3 = x^3$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

On sait déjà (énoncé) que a est un point d'intersection

$\Rightarrow$ $x = a$ vérifie l'équation

$\Rightarrow$ $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x-a)(\sim\sim)$

Pour trouver $(\sim)$, on effectue une division polynomiale

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 3a^2x + 2a^3 & x - a \\
\hline
- & x^3 - ax^2 & x^2 + ax - 2a^2 \\
\hline
 & -3a^2x + ax^2 + 2a^3 & \\
= & ax^2 - 3a^2x + 2a^3 & \\
- & ax^2 - a^2x & \\
\hline
 & -2a^2x + 2a^3 &
\end{array}
$$

$$-$$

$$\begin{array}{c} -2a^2x + 2a^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Donc $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x-a)\underbrace{(x^2 + ax - 2a^2)}_{\text{quadratique}}$

y'a t'il des racines ?

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2) = a^2 + 8a^2 = 9a^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{9a^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-a - 3a}{2}$$

$$= \frac{-4a}{2} = \boxed{-2a}$$

$ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ 2 racines

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-a+\sqrt{9a^2}}{2\cdot 1} = \frac{-a+3a}{2} = \frac{2a}{2} = \boxed{a}$$ ← on avait déjà cette solution

l'autre point d'intersection se trouve en $x = -2a$

en ce point $x^3 = (-2a)^3 = (-2)^3 a^3 = -8a^3$

$\Rightarrow$ les coordonnées du second point : $\boxed{(-2a, -8a^3)}$

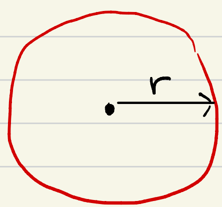
Question 17

Taux d'accroissement de circonférence d'un cercle de rayon r

Rappel : taux de variation instantanée de f(x)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Circonférence d'un cercle de rayon r :



$$C(r) = 2\pi r$$

quand le rayon varie de r à $r+\Delta r$ où Δr est infinitésimal, la variation de C est

$$\Delta C = C(r+\Delta r) - C(r)$$

$$= 2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r$$

$$= 2\pi r + 2\pi\Delta r - 2\pi r$$

$$\Delta C = 2\pi\Delta r$$

constant

le taux de variation moyen : $\dfrac{\Delta C}{\Delta r} = \dfrac{2\pi\Delta r}{\Delta r} = 2\pi$

$\Rightarrow$ le taux de variation instantanné :

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta r} = \lim_{h\to 0} 2\pi = \boxed{2\pi}$$

Question 18

Taux de variation de la demande $d(x) = \frac{1}{x^2}$ lorsque $x = 2$

Quand x varie de 2 à $2 + \Delta x$, la variation de la demande est :

$$\Delta d = d(2+\Delta x) - d(2)$$

$$= \frac{1}{(2+\Delta x)^2} - \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{1}{(2+\Delta x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4(2+\Delta x)^2} - \frac{(2+\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{4 - (2+\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2} = \frac{4 - (\overbrace{2^2}^{4} + \overbrace{2 \cdot 2}^{4} \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{4(2+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{4 - 4 - 4\Delta x - (\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2}$$

$$\Delta d = \frac{-4\Delta x - (\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2}$$

<u>Taux de variation moyen</u>

$$\frac{\Delta d}{\Delta x} = \left(\frac{-4\Delta x - (\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2} \right) / \Delta x = \frac{-4\Delta x - (\Delta x)^2}{4(2+\Delta x)^2 \Delta x}$$

$$\frac{\Delta d}{\Delta x} = \frac{-4 - \Delta x}{4(2+\Delta x)^2}$$

Taux de variation instantané

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4-\Delta x}{4(2+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{-4-0}{4(2+0)^2} = \frac{-4}{4 \cdot 2^2} = -\frac{4}{16} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$