Question 31 :

Déterminer si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + 2, & x < -1 \\ 3, & x > -1 \\ 6, & x = -1 \end{cases}$

est continue en $x = -1$

Rappel : $f(x)$ est continue en $x = a$ si $f(a)$ existe, et

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Dans l'énnoncé, on a que $f(-1) = 6$ $\leftarrow$ $f(-1)$ existe
- À gauche de -1 (i.e quand $x < -1$), $f(x) = \sqrt{-x} + 2$

Donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{-x} + 2 = \sqrt{-(-1)} + 2 = 1 + 2 = 3$

remplace x

par -1

- $3 \neq 6$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq f(-1) \Rightarrow f(x)$ n'est pas continue en $x = -1$

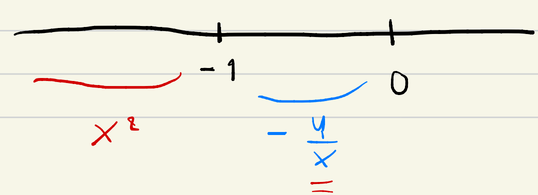
Question 32

Déterminer si $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ -\dfrac{4}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

est continue en $x = 0$

On doit déterminer si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

- Vu que $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$, on a $f(0) = \sqrt{0} = 0$ ← $f(0)$ existe
- À gauche de 0



Même si on a aussi x^2 à gauche de 0, on s'intéresse seulement au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ $f(x) = -\frac{4}{x}$ à gauche de zero

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{4}{x}$

$= -\frac{4}{0^-} = -4 \cdot -\infty = +\infty$

$\Rightarrow$ la limite en 0^- n'existe pas

Donc la fonction ne peut pas être continue en 0

Rappel

$\frac{1}{0^+} = +\infty$; $\frac{1}{0^-} = -\infty$

$\frac{1}{0}$ est indéterminé !

Question 33

Déterminer la constante b telle que la fonction définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ bx, & x \geq -1 \end{cases}$$

soit continue en $x = -1$

Il faut que $\lim\limits_{x \to -1} H(x) = H(-1)$

* $\lim\limits_{x \to -1} H(x)$

- À gauche de -1, $H(x) = 1 + x$

Donc $\lim\limits_{x \to -1^-} H(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 1+x = 1+(-1) = 0$

- À droite de -1 (i.e quand $x \geq -1$), $H(x) = bx$

  Donc $\lim\limits_{x \to -1^+} H(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} bx = b \cdot -1 = -b$

- Pour que la limite existe, il faut que $\lim\limits_{x \to -1^+} H(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} H(x)$

  donc il faut que $-b = 0$

  $$\Leftrightarrow \boxed{b = 0}$$

* Souvenez vous de l'expression initiale de $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} 1+x & x < -1 \\ bx & x \geq -1 \end{cases}$$

En remplaçant b par 0, on a

$$H(x) = \begin{cases} 1 + x & x < -1 \\ 0 & x \geq -1 \end{cases}$$

* Vérifions la continuité

- $\lim\limits_{x \to -1^-} H(x) = 0$ (calculé plus haut)

- $\lim\limits_{x \to -1^+} H(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 0 = 0$ (vu que $H(x) = 0$ quand $x \geq -1$)

- $H(-1) = 0$ (vu que $H(x) = 0$ quand $x \geq -1$)

$\lim\limits_{x \to -1^-} = \lim\limits_{x \to -1^+} = H(-1) = 0 \Rightarrow$ pour $b = 0$, $H(x)$ est continue en $x = -1$

$b = 0$ est la constante qu'on cherchait.

Question 34

Pour quelle valeur de k est-ce que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} k - x, & x < 1 \\ \dfrac{3}{k + x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

est continue ?

On doit trouver la valeur k pour laquelle f(x) est continue pour tout $a \in D_f$

Rappel : les fonctions algébriques sont continues partout sur leur domaine de définition

* quand $a < 1$, $f(x) = k - x$ dans le voisinage de a.

vu que $k-x$ est une fonction algébrique pour tout k,

alors $f(x)$ est continue en $x = a$ pour tout k (si $a \in D_f$)

* quand $a > 1$, $f(x) = \frac{3}{k + x^2}$ dans le voisinage de a.

Vu que $\frac{3}{k+x^2}$ est une fonction algébrique pour tout $k \in \mathbb{R}$,

alors $f(x)$ est continue en $x = a$ pour tout k (si $a \in D_f$)

* quand $a = 1$, $f(x)$ n'est pas algébrique dans le voisinage de a vu qu'on passe de $k - x$ à $\frac{3}{k+x^2}$

Pour que $f(x)$ soit continue en $x = 1$, il faut que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} k - x$ (vu que $f(x) = k - x$ quand $x < 1$)

$= k - 1$

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{k + x^2}$ (vu que $f(x) = \frac{3}{k+x^2}$ quand $x > 1$)

$= \frac{3}{k + 1^2} = \frac{3}{k+1}$

- pour que la limite existe, il faut que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow \quad k - 1 = \frac{3}{k+1} \quad \Leftrightarrow (k-1)(k+1) = 3$

$\Leftrightarrow k^2 - 1 = 3$ ($a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

$\iff k^2 = 4$

$\iff k = 2 \text{ ou } k = -2$

- quand $k = 2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$, $f(1) = \frac{3}{2+1^2} = \frac{3}{2+1} = 1$ } f est continue en $a = 1$

quand $k = -2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{-2+1} = \frac{3}{-1} = -3$, $f(1) = \frac{3}{-2+1^2} = \frac{3}{-2+1} = -3$ } f est continue en $a = 1$

* Récapitulons

. Sur $]-\infty, 1[$, $f(x)$ est continue pour tout k

- sur $]1, +\infty[$, $f(x)$ est continue pour tout k
- quand $a = 1$, $f(x)$ est continue pour $k = 2$ ou $k = -2$

les seules valeurs de k qui vérifient les 3 cas sont $\boxed{k=2 \text{ et } k=-2}$

Ce sont les valeurs pour lesquelles $f(x)$ est continue sur tout son domaine.

Question 35

Trouver a, b tels que

$$f(x) = \begin{cases} -ax+2 & \text{si } x < -2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ bx^3 - 3x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue par tout

* quand $x < -2$, $f(x) = -ax+2$ qui est une fonction algébrique pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x)$ est continue sur $]-\infty, -2[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

* quand $x > -2$, $f(x) = bx^3 - 3x$ qui est une fonction algébrique pour tout $b \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x)$ est continue sur $]-2, +\infty[$ pour tout $b \in \mathbb{R}$

* quand $x = -2$,

F n'est pas une fonction algébrique vu qu'on passe de c à $bx^3 - 3x$.

Pour qu'il y'ai continuité, il faut que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 6$

- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} -ax + 2$ (vu que $f(x) = -ax + 2$ quand $x < -2$)

$= -a \cdot -2 + 2$

$= 2 \cdot a + 2$

- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} bx^3 - 3x$ (vu que $f(x) = bx^3 - 3x$ quand $x > -2$)

$$= b \cdot (-2)^3 - 3 \cdot -2$$

$$= -8b + 6$$

- Donc il faut

$$\begin{cases} 2a + 2 = 6 \\ -8b + 6 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 - 2 = 4 \\ -8b = 6 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

* Récapitulons

- sur $]-\infty,-2[$, f est continue pour tout a
- sur $]-2,+\infty[$, f est continue pour tout b
- en $x=-2$, f est continue pour $a=2$ et $b=0$

Donc f est continue partout quand $\boxed{a=2 \text{ et } b=0}$

Question 36

Evaluer la limite suive si elle existe : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ $\begin{matrix}) \to 0 \\ ) \to 0 \end{matrix}$

$\frac{0}{0}$ est une forme indéterminée

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x \cdot \left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$ ← méthode du conjugué

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$ ← $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-x)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$ ← $1-(1-x) = 1-1-(-x) = 1-1+x = x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$