Question 55 :

Un objet se déplace horizontalement et sa distance h de l'origine au temps t est :

$$h(t) = \frac{t}{t^2+36}, \qquad t \geq 0$$

1) À quel instant l'objet commence à revenir sur ses pas ?

2) Quelle est l'accélération de l'objet à cet instant ?

1) l'objet commence à revenir sur ses pas quand sa vitesse est nulle

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vitesse}}}{v} = h'(t) = 0$$

• $h'(t) = ?$

$$h'(t) = \left(\frac{t}{t^2+36} \right)'$$

Rappel : $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Donc $h'(t) = \frac{(t)' \cdot (t^2+36) - t \cdot (t^2+36)'}{(t^2+36)^2}$

$$= \frac{1 \cdot (t^2+36) - t \cdot (2t+0)}{(t^2+36)^2}$$

$$= \frac{t^2+36-2t^2}{(t^2+36)^2} = \frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}$$

On veut $h'(t) = 0$

Rappel : $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0 \quad (b \neq 0)$

Donc si on pose $a = 36 - t^2$ et $b = (t^2+36)^2$,

$h'(t) = 0 \iff 36 - t^2 = 0$

$\iff 6^2 - t^2 = 0$

$\iff (6-t)(6+t) = 0$ $\quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\iff 6 - t = 0$ ou $6 + t = 0$

$\iff t = 6$ ou $t = -6$

énoncé : $t \geq 0$, donc $t = -6$ n'est pas solution

$\Rightarrow$ la seule solution est $t = 6$ $\leftarrow$ l'instant auquel l'objet commence à revenir sur ces pas

2) Quelle est l'accélération à cet instant ?

Rappel : Accélération d'un objet se déplaçant selon $f(x)$ est $f''(x)$

Donc l'accélération est $h''(t)$, $(h'(t))'$

$$h'(t) = \frac{36 - t^2}{(t^2+36)^2}$$ $\leftarrow$ question précédente

$$\Rightarrow \quad h''(t) = \left(\frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}\right)' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(36-t^2)'(t^2+36)^2 - (36-t^2)\left((t^2+36)^2\right)'}{\left((t^2+36)^2\right)^2}$$

$$\leftarrow (u^2)' = 2u'u^{2-1} = 2u'u$$

$$= \frac{-2t\,(t^2+36)^2 - (36-t^2)\; 2(t^2+36)'(t^2+36)}{(t^2+36)^{2\times 2}} \leftarrow (a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

$$h''(t) = \frac{-2t(t^2+36)^2 - (36-t^2)\cdot 2(2t)\cdot(t^2+36)}{(t^2+36)^4}$$

On veut l'accélération lorsque $t=6$

$$\rightarrow h''(6) = \frac{-2\cdot 6\cdot (6^2+36)^2 - (36-6^2)\cdot 2\cdot 2\cdot 6\,(6^2+36)}{(6^2+36)^4}$$

$$= \frac{-12\,(36+36)^2 - \overbrace{0\cdot 2\cdot 2\cdot 6\,(6^2+36)}^{=0}}{(36+36)^4}$$

$$= \frac{-12(36+36)^2}{(36+36)^4} = \frac{-12}{(36+36)^2}$$

$$= \frac{-12}{(2\cdot 36)^2} = \frac{-12}{2^2\cdot 36^2} = \frac{-12}{2\cdot 2\cdot 36\cdot 36}$$

$$= \frac{-12}{2\cdot \underbrace{2\cdot 6}_{12}\cdot 6\cdot 36} = \frac{-1}{2\cdot 6\cdot 36} = \frac{-1}{12\cdot 36} = \frac{-1}{432}$$

Question 56 :

Un palmier se déplace selon la fonction $s_1(t) = \frac{t^3}{3} + 4t^2 + 1$ et un kangourou se déplace selon la fonction $s_2(t) = 10t^2 - 36t$

Quelles sont les vitesses respectives du kangourou et du palmier au moment où leurs accélérations respectives sont identiques

* Palmier : $s_1(t) = \frac{t^3}{3} + 4t^2 + 1$

vitesse : $s_1'(t) = \frac{1}{3}(t^3)' + 4(t^2)' + (1)'$

$= \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + 4 \cdot 2t + 0$

$s_1'(t) = t^2 + 8t$

accélération : $s_1''(t) = (s_1'(t))'$

$= (t^2 + 8t)' = (t^2)' + (8t)'$

$s_1''(t) = 2t + 8$

* kangourou : $s_2(t) = 10t^2 - 36t$

vitesse : $s_2'(t) = 10(t^2)' - 36(t)'$

$= 10 \cdot 2t - 36 \cdot 1$

$s_2'(t) = 20t - 36$

accélération : $s_2''(t) = (s_2'(t))'$

$= (20t - 36)' = (20t)' - (36)' = 20 - 0$

$s_2''(t) = 20$

* les deux accélérations sont égales quand

$$s_1''(t) = s_2''(t) \iff 2t + 8 = 20$$

$$\iff 2t = 20 - 8$$

$$\iff 2t = 12$$

$$\iff t = \frac{12}{2} = 6$$

Les vitesses lorsque les deux accélérations sont égales sont :

Palmier : $s_1'(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 36 + 48 = 84$

$s_1'(t) = t^2 + 8t$

Kangourou : $s_2'(6) = 20 \cdot 6 - 36 = 120 - 36 = 84$

$s_2'(t) = 20t - 36$

Question 57

soit $s = 4t^{3/2} - 3t^2, \ t > 0$

Trouver s et a lorsque $v = 0$

accélération   vitesse

- $v = s'(t) = 4(t^{3/2})' - 3(t^2)'$

$$= 4 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}-1} - 3 \cdot 2t$$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$$= \frac{12}{2} t^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} - 6t$$

$$v = 6t^{1/2} - 6t$$

$(x^a)^b = x^{ab} \Rightarrow (t^{1/2})^2 = t^{2 \cdot \frac{1}{2}} = t$

$v = 0 \iff 6t^{1/2} - 6t = 0 \iff 6t^{1/2} - 6(t^{1/2})^2 = 0$

$\iff 6t^{1/2}(1 - t^{1/2}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6t^{1/2} = 0 \quad$ ou $\quad 1 - t^{1/2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^{1/2} = 0 \quad$ ou $\quad t^{1/2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{t} = 0 \quad$ ou $\quad \sqrt{t} = 1$

$\Leftrightarrow \quad t = 0 \quad$ ou $\quad t = 1$

énoncé : $t > 0$ donc on rejette $t = 0$

Donc la seule solution est $t = 1$

* lorsque $t = 1$, $s = 4 \cdot \underbrace{1^{3/2}}_{1} - 3 \cdot \underbrace{1^{t}}_{1} = 4 - 3 = \boxed{1}$

$1^x = 1$ quel que soit x

* $a = s''(t) = (s'(t))' = (6t^{1/2} - 6t)'$

$$= 6\left(t^{1/2}\right)' - 6\,(t)'$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2}\, t^{\frac{1}{2}-1} - 6 \cdot 1$$

$$a = 3\,t^{-\frac{1}{2}} - 6$$

au point $t = 1$,

$$a = 3 \cdot \underbrace{1^{-\frac{1}{2}}}_{1} - 6 = 3 - 6 = \boxed{-3}$$

Question 58 : Calculer les dérivées secondes, troisièmes et quatrièmes de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

$$* \quad f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})'(x+1) - (\sqrt{x})\,(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1/2\sqrt{x}\;\;(x+1) - \sqrt{x}\cdot(1+0)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} \qquad \leftarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x + 1 - 2x \right)}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}$$

$$* \quad f''(x) = (f'(x))' = \frac{(1-x)' \left(2\sqrt{x}\,(x+1)^2\right) - (1-x)\left(2\sqrt{x}\,(x+1)^2\right)'}{\left(2\sqrt{x}\,(x+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-1 \left(2\sqrt{x}\,(x+1)^2\right) - (1-x)\left((2\sqrt{x})' \cdot (x+1)^2 + 2\sqrt{x}\left((x+1)^2\right)'\right)}{\left(2\sqrt{x}\,(x+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}\,(x+1)^2 - (1-x)\left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1)^2 + 2\sqrt{x}\left(2 \cdot \overset{(x+1)'}{1} \cdot (x+1)\right)\right)}{4x\,(x+1)^4}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}\,(x+1)^2 - (1-x)\left(\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\,(x+1)\right)}{4x\,(x+1)^4}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}\,(x+1)^2 - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\,(x+1) + \frac{x\,(x+1)^2}{\sqrt{x}} + 4x\overset{x^{1/2}}{\sqrt{x}}\,(x+1)}{4x\,(x+1)^4}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}\,(x+1)^2 - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\,(x+1) + \sqrt{x}\,(x+1)^2 + 4x\sqrt{x}\,(x+1)}{4x\,(x+1)^4}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}\,(x+1) - \frac{(x+1)}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \sqrt{x}\,(x+1) + 4x\sqrt{x}\;\;) \cdot \sqrt{x}}{4x\,(x+1)^3\;\;) \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2x(x+1) - x - 1 - 4x + x(x+1) + 4x^2}{4x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x - x - 1 - 4x + x^2 + x + 4x^2}{4x^{3/2}(x+1)^3}$$

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$

$$\boxed{f''(x) = \frac{3x^2 - 6x - 1}{4x^{3/2}(x+1)^3}}$$

$$* \; f'''(x) = (f''(x))' = \frac{(3x^2 - 6x - 1)'(4x^{3/2}(x+1)^3) - (3x^2 - 6x - 1)(4x^{3/2}(x+1)^3)'}{(4x^{3/2}(x+1)^3)^2}$$

$$= \frac{(6x - 6)(4x^{3/2}(x+1)^3) - (3x^2 - 6x - 1)[(4x^{3/2})'(x+1)^3 + 4x^{3/2}((x+1)^3)']}{16x^3(x+1)^6}$$

$$= \frac{6(x-1)\cdot 4x^{3/2}\cdot (x+1)^3 - (3x^2-6x-1)\left[\frac{3}{2}\cdot 4\, x^{1/2}(x+1)^3 + 4x^{3/2}\, 3\, (x+1)^2\right]}{16\, x^3 (x+1)^6}$$

$$= \frac{24(x-1)\, x^{3/2}(x+1)^3 - (3x^2-6x-1)\left[6\, x^{1/2}(x+1)^3 + 12x^{3/2}(x+1)^2\right]}{16 x^3 (x+1)^6}$$

$$= \frac{2\, x^{1/2}\, (x+1)^2 \left[12(x-1)(x+1)x - (3x^2-6x-1)\left[3(x+1)+6x\right]\right]}{2x^{7/2}(x+1)^2 \cdot 8\cdot x^{5/2}(x+1)^4}$$

$$\underbrace{3x+3}+6x$$

$$= \frac{12(x^2-1^2)x - (3x^2-6x-1)(9x+3)}{8\, x^{5/2}\, (x+1)^4}$$

$$= \frac{12x^3-12x-27x^3-9x^2+54x^2+18x+9x+3}{8x^{5/2}(x+1)^4}$$

$$= \frac{3\,(4x^3 - 4x - 9x^3 - 3x^2 + 18x^2 + 6x + 3x + 1)}{8\,x^{5/2}\,(x+1)^4}$$

$$\boxed{f'''(x) = \frac{3\,(-5x^3 + 15x^2 + 5x + 1)}{8\,x^{5/2}\,(x+1)^4}}$$

$$* \; f''''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{(-5x^3 + 15x^2 + 5x + 1)'\,(x^{5/2}(x+1)^4) - (-5x^3 + 15x^2 + 5x + 1)\,(x^{5/2}(x+1)^4)'}{(x^{5/2}(x+1)^4)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\;\frac{(-15x^2 + 30x + 5)\,(x^{5/2}(x+1)^4) - (-5x^3 + 15x^2 + 5x + 1)\left(\frac{5}{2}x^{3/2}(x+1)^4 + x^{5/2}\cdot 4\,(x+1)^3\right)}{x^5\,(x+1)^8}$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{x^{3/2}(x+1)^3\left[(-15x^2+30x+5)\,x\cdot(x+1)-(-5x^3+15x^2+5x+1)\left(\frac{5}{2}(x+1)+4x\right)\right]}{x^{3/2}(x+1)^3\cdot x^{7/2}\cdot(x+1)^5}$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{(-15x^2+30x+5)(x^2+x)-(-5x^3+15x^2+5x+1)\left(\frac{13}{2}x+\frac{5}{2}\right)}{x^{7/2}(x+1)^5}$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{-15x^4-15x^3+30x^3+30x^2+5x^2+5x+\frac{65}{2}x^4+\frac{25}{2}x^3-\frac{195}{2}x^3-\frac{75}{2}x^2-\frac{65}{2}x^2-\frac{25}{2}x-\frac{13}{2}x-\frac{5}{2})\times 2}{x^{7/2}(x+1)^5\;)\times 2}$$

$$= \frac{3}{16}\,\frac{-30x^4-30x^3+60x^3+60x^2+10x^2+10x+65x^4+25x^3-155x^3-75x^2-65x^2-25x-13x-5}{x^{7/2}(x+1)^5}$$

$$\boxed{f''''(x) = \frac{3}{16}\,\frac{35x^4-140x^3-70x^2-28x-5}{x^{7/2}(x+1)^5}}$$

Question 60

Une somme de 1000 $ est investie dans un fond.

Pendant les 3 premières, la valeur de l'investissement est :

$$V(t) = 1000(t-1)^{4/3}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

À quel instant $V(t)$ est minimale et à quelle instant est-elle maximale ?

* Il faut commencer par trouver les points critiques

Rappel : points critiques de $f(x)$ sont les points où $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas

$$V'(t) = 1000 \cdot \frac{4}{3}(t-1)'(t-1)^{4/3 - 1}$$

$$= \frac{4000}{3} \cdot 1 \cdot (t-1)^{4/3 - \frac{3}{3}}$$

$$v'(t) = \frac{4000}{3}(t-1)^{1/3}$$ (existe pour tout $t \in [0,3]$)

$$v'(t) = 0 \iff \frac{4000}{3}(t-1)^{1/3} = 0$$

$$\iff (t-1)^{1/3} = 0$$

$$\iff t-1 = 0$$

$$\iff t = 1 \in [0,3]$$

↑ seul point critique

$$v(t) = 1000(t-1)^{4/3}$$

t	0	1	3
$v(t)$	1000	0	$1000 \cdot (24)^{1/3}$

1 et 3 sont les bornes de l'ensemble de définition

- $V(0) = 1000(0-1)^{4/3} = 1000 \cdot \big(\underbrace{(-1)^4}\big)^{1/3}$

$(-1)^4 = ((-1)^2)^2 = 1^2 = 1$

$= 1000 \cdot 1^{1/3} = 1000$

$\rightarrow V(0) = 1000$

- $V(1) = 1000(\underbrace{1-1}_{0})^{4/3}$

$\rightarrow V(1) = 0$

- $V(3) = 1000(3-1)^{4/3} = 1000 \cdot 2^{4/3}$

$V(3) = 1000 \cdot (2^4)^{1/3}$

* $0 < 1000$ et $0 < 1000 \cdot (2^4)^{1/3} \Rightarrow$ le minimum est atteint en $t = 1$

(après 1 an)

$$* \quad 2^4 > 1 \Rightarrow \underbrace{1000 \cdot (2^4)^{1/3}}_{V(3)} > \underbrace{1000 \cdot (1)^{1/3}}_{V(0)}$$

Donc le maximum est atteint en $t = 3$ (après 3 ans)

Question 61

Trouver le maximum et le minimum de

$f(x) = (x^2+1)^2$, sur $[0,4]$

* Points critiques

$f'(x) = 2\,(x^2+1)'\,(x^2+1)^{2-1}$

$= 2\,(2x+0)\,(x^2+1)$

$f'(x) = 4x\,(x^2+1)$ (existe pour tout $x \in [0,4]$)

$f'(x) = 0 \iff 4x\,(x^2+1) = 0$

$\iff 4x = 0$ ou $x^2+1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad \underbrace{x^2 = -1}$
$(0 \in [0,4])$

impossible car $x^2 \geq 0 \ \forall x$

Donc on a un seul point critique : $x = 0$

x	0	4
$f(x)$	1	17^2

$f(x) = (x^2 + 1)^2$

$f(0) = (0^2 + 1)^2 = 1^2 = 1$

$f(4) = (4^2 + 1)^2 = (16 + 1)^2 = 17^2$

Le minimum est 1 et le maximum est 17^2