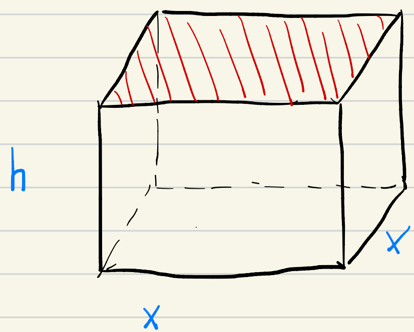
Question 69

On construit des boîtes ouvertes (i.e sans couvercle) avec $27\ cm^2$ de matériel. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximisent le volume ?



Aire de la surface $= 27\ cm^2$

$x > 0$, $h > 0$ (ce sont des longueurs)

* **Aire de la surface**

Aire de la base $+ 4 \cdot$ Aire latérale

Aire de la base : $x \cdot x = x^2$ $\leftarrow$ Aire d'un carré

Aire latérale : $x \cdot h$ $\leftarrow$ aire d'un rectangle

Donc l'aire de la surface est :

$$x^2 + 4 \cdot x \cdot h = 27 \qquad (1)$$

* <u>Volume de la boîte</u>

$$\text{volume du pavé} = \underbrace{\text{Aire de la base}}_{x^2} \times \underbrace{\text{hauteur}}_{h}$$

$$V = x^2 h$$

par (1), $4 \cdot x h = 27 - x^2$

$$\Rightarrow h = \frac{27-x^2}{4x}$$

Donc $V = x^2 \cdot \frac{27-x^2}{4x}$

$$= x \cdot \frac{27-x^2}{4} = \frac{1}{4}(27x - x^3) = f(x)$$

Maximiser le volume revient à résoudre

$$\max f(x) \qquad x \in]0, +\infty[\quad (\text{vu que } x > 0)$$

- <u>Points critiques</u>

$$f'(x) = \frac{1}{4}(27x - x^3)'$$

$$= \frac{1}{4}(27 \cdot 1 - 3x^{3-1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(27 - 3x^2)$$ (existe $\forall x \in (0, +\infty)$)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(27 - 3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 27 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = \frac{27}{3} = 9$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ ou } \underbrace{x = -3}_{\notin (0, +\infty)}$$

$\Rightarrow$ le seul point critique est $x = 3$ $\quad [a, b]$

$D_f = (0, +\infty) \leftarrow$ intervalle borné d'un seul côté

· <u>Test de la dérivée seconde</u>

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{1}{4}(27 - 3x^2)'$$

$$= \frac{1}{4}(0 - 3 \cdot 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot -6x$$

$$\Rightarrow f''(3) = \frac{1}{4} \cdot -6 \cdot 3 = -\frac{18}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ f atteint un maximum local en $x = 3$

Impossible, si c'était le cas, on aurait un deuxième point critique

Vu qu'on a un seul point critique dans $(0,+\infty)$

il y'a un maximum global en $x=3$ dans $(0,+\infty)$

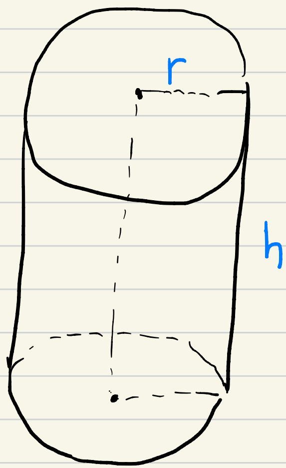
• quand $x=3$,

$$h = \frac{27-x^2}{4x} = \frac{27-3^2}{4\cdot 3} = \frac{27-9}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ les dimensions qui maximisent le volume sont $x=3$ et $h=\frac{3}{2}$

Question 70

On construit des boîtes de conserves cylindriques avec $54\pi \text{ cm}^2$ de feuilles d'acier. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximisent son volume ?



Aire de surface $= 54\pi \text{ cm}^2$

$r > 0$ (il s'agit d'une longueur)

* <u>Aire de la surface</u>

Aire latérale + 2. Aire de la base

Aire latérale = périmètre x hauteur

$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Aire de la base $= r^2\pi$

Aire surface $= 2\pi r^2 + 2\pi r h \approx 54\pi$ (1)

* <u>Volume de la boite</u>

Volume = Aire de la base x hauteur

$V = r^2\pi \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Par (1), $2\pi r h = 54\pi - 2\pi r^2$

$$\Rightarrow h = \frac{54\pi - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$= \frac{54 - 2r^2}{2r}$$

$$h = \frac{27 - r^2}{r}$$

Donc $V = \pi r^2 \cdot \frac{27 - r^2}{r}$

$$V = \pi \cdot r\,(27 - r^2) = \pi(27r - r^3)$$

On doit donc maximiser $V(r) = \pi(27r - r^3)$, $r \in (0, +\infty)$

- Points critiques

$V'(r) = \pi\,(27r - r^3)' = \pi\,(27 - 3r^2)$ (existe pour tout $r \in (0, \infty)$)

$V'(r) = 0 \iff \pi\,(27 - 3r^2) = 0 \iff 27 - 3r^2 = 0$

$\iff 3r^2 = 27 \iff r^2 = \frac{27}{3} = 9$

$\iff r = \sqrt{9}$ ou $r = -\sqrt{9}$

$\iff r = 3$ ou $r = -3$

$\notin (0, \infty)$

$\Rightarrow$ le seul point critiqu est $r = 3$

$D_F = (0, +\infty) \Rightarrow$ intervalle borné d'un seul côté

- **Test de la dérivée seconde**

$$V''(r) = (V'(r))' = \pi \, (27 - 3r^2)'$$

$$= \pi \, (0 - 3 \cdot 2r)$$

$$V''(r) = -6r\pi$$

$$\Rightarrow \quad V''(3) = -6 \cdot 3\pi = -18\pi < 0$$

Donc $V(3)$ est un maximum local

vu que $r = 3$ est le seul point critique dans $(0, +\infty)$

$V(3)$ est aussi le maximum global sur $(0, +\infty)$

- lorsque $r = 3$, $h = \frac{27 - r^2}{r} = \frac{27 - 3^2}{3} = \frac{27 - 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$

les dimensions qui maximisent le volume sont $r = 3$ et $h = 6$

Question 71

On construit des boîtes rectangulaires de base carrée et de volume $12\ cm^3$. Une des faces carrées est doublée (i.e elle utilise 2 fois plus de matériel que l'autre face carrée). Si le matériel de construction se vent à 1 \$ par cm^2, quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût de construction ?

$h > 0,\ x > 0$

base x \ cube

* Volume de la boîte

$V =$ base $\times$ hauteur

$V = x^2 \cdot h = 12$ (1)

énoncé

* Aire du matériel utilisé

$4 \cdot$ Aire latérale $+ \; 2$ Aire Base doublée $+$ Aire base non doublée

Aire latérale $= x \cdot h$

Aire bases $= x \cdot x = x^2$

$A = 4 \cdot x \cdot h + 2x^2 + x^2 = 4 \cdot x \cdot h + 3x^2$

le coût est 1\$ par unité d'aire,

donc

$$C = 1 \cdot A = 1 \cdot (4 \cdot x \cdot h + 3x^2)$$

$$C = 3x^2 + 4xh$$

Car (1), $h = \frac{12}{x^2}$

$$\rightarrow \quad C = 3x^2 + 4x \cdot \frac{12}{x^2}$$

$$C(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$$

On veut minimiser le coût

$$\rightarrow \quad \min \ 3x^2 + \frac{48}{x} \quad , \quad x \in (0, +\infty)$$

- <u>Points critiques</u>

$$C'(x) = 3 \cdot 2x + 48 \cdot -\frac{1}{x^2}$$

$$= 6x - \frac{48}{x^2} \quad (\text{existe pour tout } x \in (0,\infty))$$

$$C'(x) = 0 \iff 6x = \frac{48}{x^2} \iff 6x \cdot x^2 = 48$$

$$\iff 6x^3 = 48 \iff x^3 = \frac{48}{6} = 8$$

$$\iff x = 2 \quad \leftarrow \text{un seul point critique}$$

$D_F = (0, +\infty)$ ← borné d'un seul côté

- <u>Test de la dérivée seconde</u>

$$c''(x) = (c'(x))' = \left(6x - \frac{48}{x^2}\right)'$$

$$= 6 \cdot 1 - 48 \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= 6 - 48 \cdot (x^{-2})'$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

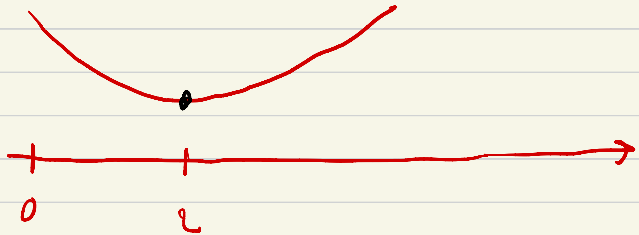
$$= 6 - 48 \cdot -2\, x^{-2-1}$$

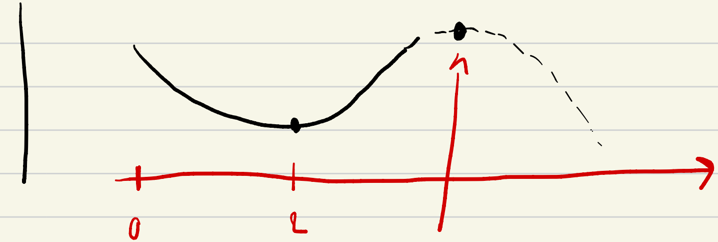
$$= 6 - 48 \cdot -2 \cdot x^{-3}$$

$$= 6 + \frac{48 \cdot 2}{x^3}$$

$$\Rightarrow c''(2) = 6 + \frac{48 \cdot 2}{2^3} > 0$$

Donc $C(2)$ est un min local





impossible sinon on aurait un deuxième point critique

Vu que $x = 2$ est le seul point critique, $C(2)$ est le minimum global

- quand $x = 2$,

$$h = \frac{12}{x^2} = \frac{12}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$$

Les dimensions qui minimisent le coût sont $x = 2$ et $h = 3$

Question 72

Que sont les points d'inflexion de la fonction définie par

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 3x - 5$$

Rappel : un point d'inflexion est un point où la fonction change de concavité.

a est un point d'inflexion $\Rightarrow f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ n'existe pas

⚠ la réciproque n'est pas vraie !

- $f'(x) = (x^4)' - 12(x^2)' + (3x)' - (5)'$

$$= 4x^3 - 24x + 3$$

- $f''(x) = (f'(x))' = 4(x^3)' - (24x)' + (3)'$

$$= 4 \cdot 3x^2 - 24$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24 \quad \text{(existe pour tout } x\text{)}$$

On étudie la concavité de la fonction à partir du signe de f''

$f''(x) = 12x^2 - 24$ ← quadratique

$$12x^2 - 24 = 0 \iff 12x^2 = 24 \iff x^2 = \frac{24}{12} = 2$$

$$\iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Rappel : $ax^2 + bx + c \longrightarrow a > 0$: $+ \;\; x_1 \;\; - \;\; x_2 \;\; +$

$a < 0$: $- \;\; x_1 \;\; + \;\; x_2 \;\; -$

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$\leftarrow a = 12 > 0$

les points d'inflexion sont $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$

Question 73

Sur quel(s) intervalles la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ est-elle concave vers le haut ?

- On remarque f n'est pas définie en 3 $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- $f'(x) = \dfrac{(x)' \cdot (x-3) - x(x-3)'}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x - 3 - x \cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{-3}{(x-3)^2}$

- $f''(x) = -3 \cdot \left(\dfrac{1}{(x-3)^2} \right)' = -3 \left((x-3)^{-2} \right)'$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$

$= -3 \cdot -2 \cdot (x-3)^{-2-1} = 6(x-3)^{-3}$

$f''(x) = \dfrac{6}{(x-3)^3}$ $\leftarrow$ $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- <u>signe de $f''(x)$</u>

$6 > 0 \Rightarrow f''(x)$ est du même signe de $(x-3)^3$

Note : lorsque n est impair, a^n a le même signe que a

Donc $f''(x)$ a le même signe que $x-3$ (3 est impair)

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\cap$	$\Vert$	$\cup$	

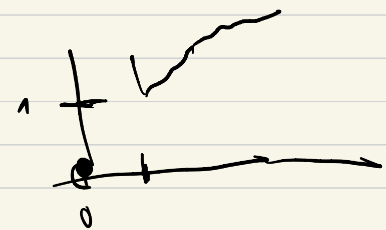
F est concave vers le haut

sur $(3, +\infty)$

Question 74

Esquisser le graphique de $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

$\frac{a}{b=0}$



* Domaine

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow x^2+1 \neq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

* Asymptotes

A.H : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{\to+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \Rightarrow y=0$ est A.H

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{\underbrace{x^2}_{\to+\infty}+1} = \frac{2}{+\infty} = 0 \Rightarrow y=0$ est A.H

A.V : Aucun point de discontinuité Donc pas d'asymptote verticale

* <u>Zeros</u>

- Rappel $\frac{a}{b} = 0 \ (b \neq 0) \Leftrightarrow a = 0$ $\qquad \frac{2}{x^2+1}$

  ici $a = 2 \neq 0$ Donc $f(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow$ Aucune racine

- $f(0) = \frac{2}{0^2+1} = \frac{2}{1} = 2$

* <u>points critiques et signe de la dérivée</u>

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = 2 \cdot \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$ (existe pour tout x car $x^2+1 \neq 0 \ \forall x$)

$(x^2+1)^2 > 0 \Rightarrow f'(x)$ est du même signe que $-4x$

$-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$-4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

* Points d'inflexion et signe de la dérivée seconde

$$f''(x) = (f'(x))' = -4 \cdot \left(\frac{x}{(x^2+1)^2} \right)'$$

$$= -4 \cdot \frac{(x)' \cdot (x^2+1)^2 - x \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}$$

$$= -4 \cdot \frac{(x^2+1)^2 - x \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= -4 \cdot \frac{(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$= -4 \cdot \frac{1 - 3x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{12x^2 - 4}{(x^2+1)^3}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- On a montré plus haut que $x^2+1 > 0 \ \forall x$, donc $(x^2+1)^3 > 0 \ \forall x$

$\Rightarrow f''(x)$ est du même signe que $12x^2 - 4 \leftarrow$ quadratique

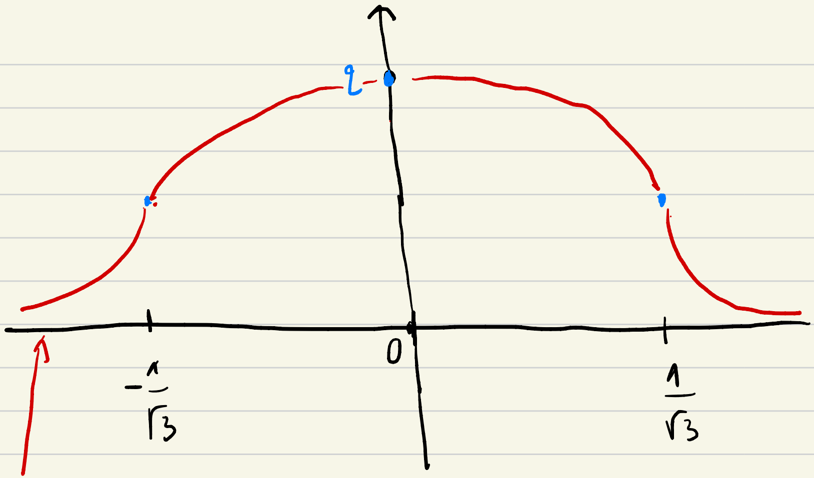
$f''(x)$	$+$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+$

$\leftarrow a = 12 > 0$

* Variation et concavité

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗		↘		↘	

↑ maximum



Asymptote verticale $y=0$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2}$$

⚠ On s'est arrêté là, Il n'y avait plus de temps