Question 83

$$\int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,dx = \int 1 + x^{-2}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \underbrace{\frac{x^{0+1}}{0+1}}_{1 = x^0} + c_1 + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_2$$

$$= x + \frac{x^{-1}}{-1} + c \qquad (c = c_1 + c_2)$$

$$= \boxed{x - \frac{1}{x} + c}$$

Question 84 : Evaluer $\int_{3.5}^{3} F(x)\,dx$ si $\int_{3}^{3.5} F(x)\,dx = 1$

$$\int_{b}^{a} F(x)\,dx = -\int_{a}^{b} F(x)\,dx$$

Donc $\int_{3,5}^{3} F(x)\,dx = -\int_{3}^{3,5} F(x)\,dx$

$$\boxed{\int_{3,5}^{3} f(x)\,dx = -1}$$

Question 85

Le revenu marginal d'un produit est $R'(x) = 2x + 4x^{-1/2}$.

si le revenu de vente d'une unité est 10 \$, quel est le revenu de vente de 4 unités ?

* Il faut d'abord trouver l'expression du revenu $R(x)$

vu que la dérivée de $R(x)$ est $R'(x)$, $R(x)$ est une primitive de de $R'(x)$

$$\Rightarrow \quad R(x) = \int R'(x)\, dx$$

$$= \int 2x + 4x^{-1/2}\,dx$$

$$= \int 2x\,dx + \int 4x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\int x\,dx + 4\int x^{-1/2}\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= 2\,\frac{x^{1+1}}{\underbrace{1+1}_{2}} + c_1 + 4\,\frac{x^{-1/2+1}}{\underbrace{-\frac{1}{2}+1}_{\frac{1}{2}}} + c_2$$

$$= x^2 + c_1 + 4\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2}}_{2}}\,x^{1/2} + c_2$$

$$R(x) = x^2 + 8x^{1/2} + c \qquad (c = c_1 + c_2)$$

$$c = ?$$

On nous dit dans l'énoncé que $R(1) = 10$

Donc $R(1) = 1^2 + 8 \cdot 1^{1/2} + c = 10$

$$= 1 + 8 + c = 10$$

$$\Rightarrow 9 + c = 10 \Rightarrow c = 10 - 9 = 1$$

Donc $R(x) = x^2 + 8x^{1/2} + 1$

* $R(4) = 4^2 + 8 \cdot 4^{1/2} + 1 = 16 + 8 \cdot \underbrace{\sqrt{4}}_{2} + 1 = 16 + 16 + 1$

$$= 32 + 1 = \boxed{33}$$

Question 66

Le profit marginal d'un produit est donné par

$$P'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On sait que $P(1) = 10$. Trouver $P(4)$

* On doit d'abord trouver $P(x)$

$P(x)$ est une primitive de $P'(x)$, donc

$$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$= \int 1 - 4x^{-2} + \frac{1}{x^{1/2}} \, dx$$

$$= \int 1 - 4x^{-2} + x^{-1/2} \, dx$$

$$= \int 1 \, dx - 4 \int x^{-2} \, dx + \int x^{-1/2} \, dx \qquad \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \underbrace{\frac{x^{0+1}}{0+1}}_{1 = x^0} + c_1 - 4 \, \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_2 + \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_3$$

$$= x - 4 \, \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c \qquad (c = c_1 + c_2 + c_3)$$

$$F(x) = x + 4x^{-1} + 2x^{1/2} + \underbrace{c}_{!}$$

On nous dit dans l'énoncé que $P(1) = 10$

Donc $1 + 4 \cdot 1^{-1} + 2 \cdot 1^{1/2} + c = 10$

$\Rightarrow 1 + 4 + 2 + c = 10$

$\Rightarrow 7 + c = 10 \Rightarrow c = 10 - 7 \Rightarrow \underline{c = 3}$

$\rightarrow P(x) = x + 4x^{-1} + 2x^{1/2} + \underline{3}$

$*$ $P(4) = 4 + 4 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{1/2} + 3$

$= 4 + 1 + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{4}}_{2} + 3$

$= 4 + 1 + 4 + 3$

$$\boxed{P(4) = 12}$$

Question 87

soit $f'(x) = 4x^3 + 3\sqrt{x+1} - 1$. si $f(0) = 3$, quelle valeur prend $f(3)$?

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 4x^3 + 3\sqrt{x+1} - 1\,dx$$

$$= \underbrace{4\int x^3\,dx}_{①} + \underbrace{3\int (x+1)^{1/2}\,dx}_{②} - \underbrace{\int 1\,dx}_{③}$$

① $4\int x^3\,dx = 4\,\frac{x^{3+1}}{3+1} + c_1 = 4\,\frac{x^4}{4} + c_1 = x^4 + c_1$

② $3\int (x+1)^{1/2}\,dx$ on va utiliser l'intégration par substitution

Posons $u = x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = (x)' + (1)' = 1+0 = 1$

$\Rightarrow du = dx$

donc $3\int (x+1)^{1/2}\, dx = 3\int u^{1/2}\, du$

$= 3 \cdot \frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_2$

$= 3 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + C_2 = 3 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C_2$

$= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + C_2 = 2 \cdot u^{3/2} + C_2$

$3\int (x+1)^{1/2}\, dx = 2 \cdot (x+1)^{3/2} + C_2$

③ $-\int 1 \, dx = -x + c_3$

Donc $F(x) = ① + ② + ③ = x^4 + c_1 + 2(x+1)^{3/2} + c_2 - x + c_3$

$$F(x) = x^4 + 2(x+1)^{3/2} - x + \underbrace{c}_{?}$$

Énoncé $\Rightarrow F(0) = 3$

$$\Rightarrow \underbrace{0^4}_{0} + 2(\underbrace{0+1}_{1})^{3/2} - 0 + c = 3$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1^{3/2} + c = 3 \Rightarrow 2 + c = 3 \Rightarrow c = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = x^4 + 2(x+1)^{3/2} - x + 1$$

$$* \quad f(3) = 3^4 + 2(3+1)^{3/2} - 3 + 1$$

$$= (3^2)^2 + 2\cdot(4^{1/2})^3 - 3 + 1$$

$$= 9^2 + 2\cdot 2^3 - 3 + 1$$

$$= 81 + 2\cdot 8 - 3 + 1$$

$$= 81 + 16 - 3 + 1$$

$$\boxed{f(3) = 95}$$