Question 117

Combien de points critiques sont admis par la fonction définie par

$$f(x,y) = y^2 + 2y + 2x^3 - 6x^2 + 7$$

Rappel : les points critiques sont les paires $(a,b) \in D_f$ tels que

1. $f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) = 0$

ou

2. Au moins une des dérivées partielles $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ n'existe pas

- $$f_x(x,y) = \frac{d}{dx} y^2 + \frac{d}{dx} 2y + 2\frac{d}{dx} x^3 - 6 \cdot \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} 7$$

$$= 0 + 0 + 2 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0$$

On considère y comme une constante

$$= 6x^2 - 12x$$

- $$F_y(x,y) = \frac{d}{dy} y^2 + \frac{d}{dy} 2y + \frac{d}{dy} x^3 - \frac{d}{dy} 6x^2 + \frac{d}{dy} 7$$

$$= 2y + 2 + 0 - 0 + 0$$

On considère x comme une constante

$$F_y(x,y) = 2y + 2$$

les deux dérivées partielles existent

$$* \begin{cases} F_x(x,y) = 0 \\ F_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 12x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(6x-12)=0 \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{ou} \quad 6x-12=0 \\ y=-\frac{2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{ou} \quad 6x=12 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{12}{6}=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

(x, y)

Les points critiques sont $(0,-1)$ et $(2,-1)$

Question 118

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2y^3 + xy - 2x^2 + y^2$$

Que vaut $f_{xy}(1,1)$?

Rappel : $f_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f\right)$

f_x

- $\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} x^2 \cdot y^3 + \frac{d}{dx} xy - \frac{d}{dx} 2x^2 + \frac{d}{dx} y^2$

$$= y^3 \cdot \frac{d}{dx} x^2 + y \cdot \frac{d}{dx} x - 2 \cdot 2x + 0$$

$$= y^3 \cdot 2x + y \cdot 1 - 4x$$

$$\frac{d}{dx} f = 2xy^3 + y - 4x$$

- $f_{xy} = \frac{d}{dy} \left(2xy^3 + y - 4x \right)$

$$= \frac{d}{dy} 2xy^3 + \frac{d}{dy} y - \frac{d}{dy} 4x$$

$$= 2x \cdot \frac{d}{dy} y^3 + 1 - 0$$

$$= 2x \, 3y^2 + 1$$

$$f_{xy} = 6xy^2 + 1$$

- $f_{xy}(1,1) = 6 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1 = 6 + 1 = \boxed{7}$

Question 119

Soit f la fonction définie par

$$F(x,y) = x^2y^3 + xy$$

Quelle valeur prend $F_{xy}(0,10)$?

$$F_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f(x,y)\right)$$

- $$\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} x^2y^3 + \frac{d}{dx} xy$$

$$= y^3 \frac{d}{dx} x^2 + y \cdot \frac{d}{dx} x$$

$$= y^3 \cdot 2x + y \cdot 1$$

$$f_x(x,y) = 2xy^3 + y$$

- $$f_{xy}(x,y) = \frac{d}{dy}(2xy^3 + y)$$

$$= \frac{d}{dy} 2xy^3 + \frac{d}{dy} y$$

$$= 2x \cdot \frac{d}{dy} y^3 + 1$$

$$f_{xy} = 2x \cdot 3y^2 + 1$$

- $$f_{xy}(0, 10) = 2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 10^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Question 120

Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de la surface $z = f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2$ au point $(2,1,-3)$?

Rappel : Soit $z = f(x,y)$ une surface dérivable au point $P = (a, b, f(a,b))$. L'équation du plan tangent à la surface au point P est

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

- On commence d'abord par vérifier que le point $(2,1,-3)$ est sur la surface

$$f(2,1) = 2 \cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 = 2 - 4 - 1 = -3$$

Donc le point est bien sur la surface

- $$f_x(x,y) = \frac{d}{dx} xy^2 - \frac{d}{dx} x^2 - \frac{d}{dx} y^2$$

$$= y^2 \cdot \frac{d}{dx} x - 2x - 0$$

$$= y^2 - 2x$$

$$\Rightarrow f_x(2,1) = 1^2 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

- $$f_y(x,y) = \frac{d}{dy} xy^2 - \frac{d}{dy} x^2 - \frac{d}{dy} y^2$$

$$= x \cdot \frac{d}{dy} y^2 - 0 - 2y$$

$= x \cdot 2y - 2y$

$\Rightarrow f_y(2,1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$

- L'équation du plan tangent est :

$z = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1)$

$= -3 + -3(x-2) + 2(y-1)$

$= -3 - 3x + 6 + 2y - 2$

$\boxed{z = -3x + 2y + 1}$

Question 121

classifier les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$$

$*$ Points critiques

Rappel : les points critiques sont les paires $(a,b) \in D_f$ tels que

1. $f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) = 0$

ou

2. Au moins une des dérivées partielles $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ n'existe pas

- $f_x(x,y) = \frac{d}{dx} x^3 + \frac{d}{dx} x^2 y - \frac{d}{dx} y^2 - \frac{d}{dx} 4y$

$$= 3x^2 + y \frac{d}{dx} x^2 - 0 - 0$$

$$= 3x^2 + y \cdot 2x$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy$$

- $f_y(x,y) = \frac{d}{dy} x^3 + \frac{d}{dy} x^2 y - \frac{d}{dy} y^2 - \frac{d}{dy} 4y$

$$= 0 + x^2 \frac{d}{dy} y - 2y - 4$$

$$f_y(x,y) = x^2 - 2y - 4$$

Les dérivées partielles existent partout

- $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 & (1) \\ x^2 - 2y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\iff x(3x + 2y) = 0 \iff x = 0$ ou $3x + 2y = 0$

- si $\underline{x = 0}$, en remplaçant x par 0 dans (2), on a

$$0^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow \underline{y = -2} \rightarrow (0, -2)$$

- si $3x + 2y = 0$ alors $2y = -3x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$

En remplaçant y par cette expression dans (2), on a

$$x^2 - 2 \cdot -\frac{3}{2}x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \leftarrow \text{quadratique}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

on avait $y = -\frac{3}{2}x$

$\underline{x = -4} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot -4 = \frac{12}{2} = \underline{6} \rightarrow (-4, 6)$

$\underline{x = 1} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot 1 = \underline{-\frac{3}{2}} \rightarrow (1, -\frac{3}{2})$

Les points critiques sont :

$(0,-2)$, $(-4,6)$ et $(1,-\frac{3}{2})$

* classification des points critiques

Rappel : Théorème de la dérivée seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable d'ordre 2 et (a,b) un de ses points critiques. Supposons que

$$D = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 \neq 0$$

- si $D > 0$ et $f_{xx}(a,b) > 0$, alors f atteint un min relatif en (a,b)
- si $D > 0$ et $f_{xx}(a,b) < 0$, alors f atteint un max relatif en (a,b)
- si $D < 0$, alors (a,b) est un point selle de f

- $f_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 2xy)$

$$= \frac{d}{dx} 3x^2 + y \cdot \frac{d}{dx} 2x = 3 \cdot 2x + y \cdot 2$$

$$f_{xx} = 6x + 2y$$

$$f_{yy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dy} f\right) = \frac{d}{dy}\left(x^2 - 2y - 4\right)$$

$$= \frac{d}{dy} x^2 - \frac{d}{dy} 2y - \frac{d}{dy} 4$$

$$= 0 - 2 - 0$$

$$f_{yy} = -2$$

$$f_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f\right) = \frac{d}{dy}(3x^2 + 2xy)$$

$$= \frac{d}{dy} 3x^2 + 2x \cdot \frac{d}{dy} y$$

$$= 0 + 2x \cdot 1$$

$$f_{xy} = 2x$$

Donc

$$D(x,y) = (6x + 2y) \cdot (-2) - (2x)^2$$

- $\underline{(0,-2)}$

$$D(0,-2) = (6 \cdot 0 + 2 \cdot -2) \cdot (-2) - (2 \cdot 0)^2$$

$= -4 \cdot -2 - 0 = 8 > 0$

$f_{xx}(0,-2) = 6 \cdot 0 + 2 \cdot -2 = -4 < 0$

Donc on a un max local en $(0,-2)$

- $(-4,6)$

$D(-4,6) = (6 \cdot -4 + 2 \cdot 6) \cdot (-2) - (2 \cdot -4)^2$

$= (-24 + 12) \cdot (-2) - (-8)^2$

$= -12 \cdot -2 - 64$

$= 24 - 64 = -40 < 0$

$\Rightarrow$ $(-4,6)$ est un point selle

- $D(1, -\frac{3}{2}) = (6 \cdot 1 + 2 \cdot -\frac{3}{2}) \cdot (-2) - (2 \cdot 1)^2$

$$= (6-3) \cdot (-2) - 4$$

$$= 3 \cdot (-2) - 4 = -10 < 0$$

$\Rightarrow (1, -\frac{3}{2})$ est un point selle

Question 122

Classifier les points critiques de

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

* Points critiques

- $F_x(x,y) = \frac{d}{dx} 3x^2y + \frac{d}{dx} y^3 - \frac{d}{dx} 3x^2 - \frac{d}{dx} 3y^2 + \frac{d}{dx} 2$

$$= y \cdot 3 \cdot 2x + 0 - 3 \cdot 2x - 0 + 0$$

$$F_x(x,y) = 6xy - 6x$$

- $f_y(x,y) = \frac{d}{dy} 3x^2y + \frac{d}{dy} y^3 - \frac{d}{dy} 3x^2 - \frac{d}{dy} 3y^2 + \frac{d}{dy} 2$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 0 - 3 \cdot 2y + 0$$

$$f_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y$$

Les deux dérivées partielles existent partout

- $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6xy - 6x = 0 & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \iff 6x(y-1) = 0 \iff 6x = 0$ ou $y - 1 = 0$

$\iff x = 0$ ou $y = 1$

- pour $x = 0$, en remplaçant dans (2), on obtient

$$3 \cdot 0^2 + 3y^2 - 6y = 0 \iff 3y^2 - 6y = 0$$

$\Leftrightarrow Y(3Y-6)=0 \Leftrightarrow Y=0$ ou $3Y-6=0$

$\Leftrightarrow Y=0$ ou $3Y=6$

$\Leftrightarrow \underline{Y=0}$ ou $\underline{Y=2}$ $\rightarrow$ $(0,0)$ et $(0,2)$ sont solutions

• pour $\underline{Y=1}$, en remplaçant dans (2) on obtient

$3X^2+3\cdot 1^2-6\cdot 1=0$

$\Leftrightarrow 3X^2+3-6=0 \Leftrightarrow 3X^2-3=0$

$\Leftrightarrow 3X^2=3 \Leftrightarrow X^2=1$

$\Leftrightarrow \underline{X=1}$ ou $\underline{X=-1}$ $\rightarrow$ $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont solutions

les points critiques sont $(0,0)$; $(0,2)$, $(1,1)$, $(-1,1)$

* classification des points critiques

- $f_{xx} = \frac{d}{dx}(f_x) = \frac{d}{dx}(6xy - 6x)$

$$= y \cdot \frac{d}{dx} 6x - \frac{d}{dx} 6x = y \cdot 6 - 6$$

$$f_{xx} = 6y - 6$$

- $f_{yy} = \frac{d}{dy}(f_y) = \frac{d}{dy}(3x^2 + 3y^2 - 6y)$

$$= \frac{d}{dy} 3x^2 + \frac{d}{dy} 3y^2 - \frac{d}{dy} 6y = 0 + 3 \cdot 2y - 6$$

$$f_{yy} = 6y - 6$$

$$\cdot\ f_{xy} = \frac{d}{dy}(f_x) = \frac{d}{dy}(6xy - 6x)$$

$$= \frac{d}{dy} 6xy - \frac{d}{dy} 6x$$

$$= 6x - 0$$

$$f_{xy} = 6x$$

Donc $D(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$

$$= (6y-6) \cdot (6y-6) - (6x)^2$$

$$= 6(y-1) \cdot 6(y-1) - 36x^2$$

$$= 36(y-1)^2 - 36x^2$$

$$D(x,y) = 36\left[(y-1)^2 - x^2\right]$$

- $\underline{(0,0)}$

$$D(0,0) = 36\left[(0-1)^2 - 0^2\right] = 36 \cdot (-1)^2 = 36 > 0$$

$$f_{xx}(0,0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

$\Rightarrow$ max local en $(0,0)$

- $\underline{(0,2)}$

$$D(0,2) = 36\left[(2-1)^2 - 0^2\right] = 36\left[1^2 - 0\right] = 36 > 0$$

$$f_{xx}(0,2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ min local en $(0,2)$

- $\underline{(-1,1)}$

$D(-1,1) = 36\left[(1-1)^2 - (-1)^2\right] = 36\left[0-1\right] = -36 < 0$

$\Rightarrow$ $(-1,1)$ est un point selle

- $\underline{(1,1)}$

$D(1,1) = 36\left[(1-1)^2 - 1^2\right] = 36\left[0-1\right] = -36 < 0$

$\Rightarrow$ $(1,1)$ est un point selle