Question 23

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \underbrace{\frac{10}{2+x}}_{f(x)}$ et $y = \underbrace{-x+5}_{g(x)}$

sur l'intervalle $[0, 4]$

* Points d'intersection

$$\frac{10}{2+x} = -x+5 \Rightarrow 10 = (2+x)(-x+5)$$

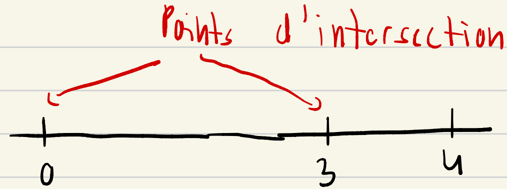
$$\Rightarrow 10 = -2x + 10 - x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 5x = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(-x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -x+3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3$$



* Position relative des courbes (i.e $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$?)

On a besoin du signe de $f(x) - g(x)$ sur les intervalles

$$[0,3) \text{ et } (3,4]$$

$1 \in [0,3)$: $f(1) = \frac{10}{2+1} = \frac{10}{3}$

$g(1) = -1+5 = 4 = \frac{12}{3}$

$f(1) < g(1)$

$\Rightarrow f < g$ sur $[0,3)$

$3.5 \in (3,4]$: $f(3.5) = \frac{10}{2+3.5} = \frac{10}{5.5}$

$g(3.5) < f(3.5)$

$g(3.5) = -3.5+5 = 1.5$ $\Big) \Rightarrow g < f$ sur $[3,4]$

$*$ Aire de la région bornée

$$A = \underbrace{\int_0^3 g(x) - f(x)\, dx}_{1} + \underbrace{\int_3^4 f(x) - g(x)\, dx}_{2}$$

1 $\displaystyle\int_0^3 g(x) - f(x)\, dx = \int_0^3 -x+5-\frac{10}{2+x}\, dx$

primitive de $\frac{1}{2+x} \rightarrow u = 2+x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2+x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| = \ln|2+x|$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 5x - 10 \cdot \ln|2+x| \right]_0^3$$

(2) $$\int_3^4 f(x) - g(x)\, dx = \int_3^4 \frac{10}{2+x} - (-x+5)\, dx$$

$$= \int_3^4 \frac{10}{2+x} + x - 5 \, dx$$

$$= \left[10 \ln|2+x| + \frac{x^2}{2} - 5x \right]_3^4$$

Donc $A = \underbrace{\left[-\frac{x^2}{2} + 5x - 10 \cdot \ln|2+x| \right]_0^3}$ $+ \left[10 \ln|2+x| + \frac{x^2}{2} - 5x \right]_3^4$

$$= \left(-\frac{3^2}{2} + 5 \cdot 3 - 10 \ln(5) \right) - \left(\overbrace{-\frac{0^2}{2} + 5 \cdot 0}^{0} - 10 \ln(2) \right)$$

$$+ \left(10 \ln(6) + \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 4 \right) \underbrace{- \left(10 \ln(5) + \frac{3^2}{2} - 5 \cdot 3 \right)}$$

$$= 2\left(\underbrace{-\frac{3^2}{2}}_{-\frac{9}{2}} + \underbrace{5\cdot 3}_{15} - 10\ln(5)\right) + 10\ln(2) + 10\ln(6) + 8 - 20$$

$$= -9 + 30 - 20\ln(5) + 10\ln(2) + 10\ln(6) + 8 - 20$$

$$= 9 + 10\left(-2\ln(5) + \ln(2) + \ln(6)\right)$$

$$= 9 + 10\left(-\ln(5^2) + \ln(2\cdot 6)\right)$$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$= 9 + 10\left(\ln\left(\frac{1}{5^2}\right) + \ln(12)\right)$$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

$$= 5 + 10 \left(\ln \left(\frac{12}{5^2} \right) \right) = \boxed{5 + 10 \ln \left(\frac{12}{25} \right)}$$

Question 94

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \overbrace{x^2 - 1}^{f(x)}$ et

$y = \underbrace{1-x}_{g(x)}$ sur l'intervalle $[-2,2]$

* Points d'intersection

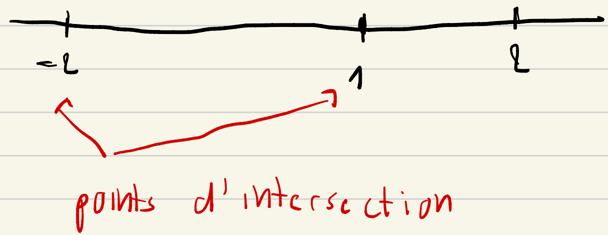
$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 - (1-x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 - 1 + x = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

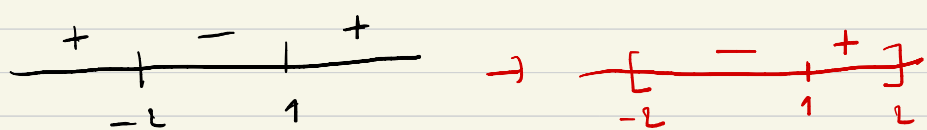


* position relative des courbes

$f(x) > g(x) \iff f(x)-g(x) > 0$ et $f(x) < g(x) \iff f(x)-g(x) < 0$

On sait que $f(x)-g(x) = x^2+x-2$

↳ racines : $x_1 = -2$, $x_2 = 1$



Donc $f(x) < g(x)$ sur $[-2, 1)$ et $f(x) > g(x)$ sur $(1, 2]$

* Aire de la région

$$A = \int_{-2}^{1} g(x) - f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} -(f(x) - g(x))\, dx + \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} -(x^2 + x - 2)\, dx + \int_{1}^{2} x^2 + x - 2\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\, dx + \int_{1}^{2} x^2 + x - 2\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot -2 \right)$$

$$+ \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\cdot 1 \right)$$

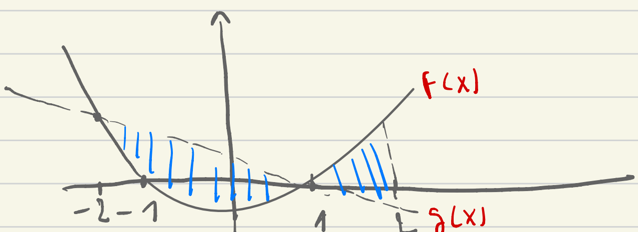
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) + \frac{-8}{3} + 2 + 4 + \frac{8}{3} + 2 - 4$$

$$+ \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) + 4$$

$$= 2\left(-\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6}\right) + 4 = 2 \cdot \frac{7}{6} + 4 = \frac{14}{6} + 4$$

$$= \frac{14}{6} + \frac{24}{6} = \frac{38}{6} = \boxed{\frac{19}{3}}$$



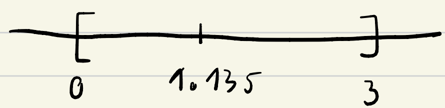
← Quand on dessine la courbe

Question 55

Déterminer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \overbrace{\sqrt{x+1}}^{f(x)}$ et $y = \overbrace{x^3}^{g(x)}$ sur l'intervalle $[0, 3]$ (le pt d'intersection se situe en $x \simeq 1.135$

* Points d' intersection

$x \simeq 1.135$ ← énoncé



* Positions relatives des courbes

- sur $[0, 1.135)$

$1 \in [0, 1{,}135)$

$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $g(1) = 1^3 = 1$

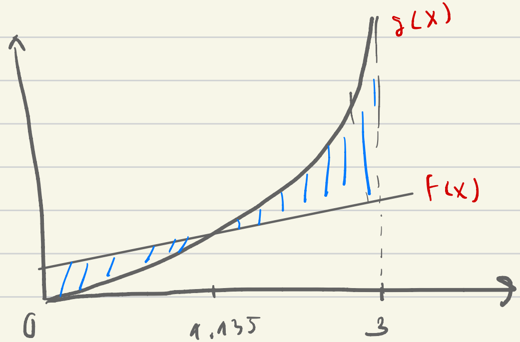
$f(1) > g(1) \Rightarrow f(x) > g(x)$ sur $[0, 1.135)$

- sur $[1.135, 3]$

$2 \in [1.135, 3]$

$f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$; $g(2) = 2^3 = 8$

$g(2) > f(2) \Rightarrow g(x) > f(x)$ sur $[1.135, 3]$



Aire de la surface

$$A = \int_0^{1.135} f(x) - g(x)\,dx + \int_{1.135}^{3} g(x) - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1.135} \sqrt{x+1} - x^3\,dx + \int_{1.135}^{3} x^3 - \sqrt{x+1}\,dx$$

Primitive de $\sqrt{x+1}$: $u = x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{1.135} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_{1.135}^{3}$$

posons $a = 1.135$ (pour simplifier le calcul)

$$= \frac{2}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{a^4}{4} - \left(\frac{2}{3}(0+1)^{3/2} - \frac{0^4}{4} \right)$$

$$+ \frac{3^4}{4} - \frac{2}{3}(3+1)^{3/2} - \left(\frac{a^4}{4} - \frac{2}{3}(a+1)^{3/2} \right)$$

$$= \frac{2}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{a^4}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3^4}{4} - \frac{2}{3} 4^{3/2} + \frac{2}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{a^4}{4}$$

$$\frac{3^4}{4} = \frac{3^2 \cdot 3^2}{4} = \frac{9 \cdot 9}{4} = \frac{81}{4}$$

$$4^{3/2} = 4^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{a^4}{4} \right) - \frac{2}{3} + \frac{81}{4} - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{4}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{a^4}{2} - \frac{8}{12} + \frac{81 \cdot 3}{12} - \frac{16 \cdot 4}{12}$$

$$= \frac{4}{3}(1.135+1)^{3/2} - \frac{1.135^4}{2} + \frac{-8+243-64}{12}$$

$$= \frac{4}{3}(2.135)^{3/2} - \frac{1.135^4}{2} + \frac{171}{12} \approx 17.580$$

Question 96

Déterminer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \overset{f(x)}{x^4}$ et $y = \overset{g(x)}{2}$

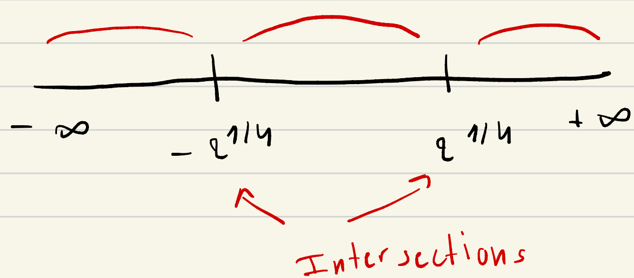
⚠ les bornes d'intégration ne sont pas données

* Points d'intersection

$$x^4 = 2 \Rightarrow (x^2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$= \pm\left(2^{1/2}\right)^{1/2} = \pm 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \pm 2^{1/4}$$



← On a trois intervalles

La région bornée se trouve sur l'intervalle $[-2^{1/4} ; 2^{1/4}]$

* <u>positions relative des courbes</u>

sur $[-2^{1/4} ; 2^{1/4}]$

$0 \in [-2^{1/4}, 2^{1/4}]$: $f(0) = 0^4 = 0$; $g(0) = 2$

$g(0) > f(0) \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ sur $[-2^{1/4}, 2^{1/4}]$

* <u>Aire de la région</u>

$$A = \int_{-2^{1/4}}^{2^{1/4}} g(x) - f(x) \, dx = \int_{-2^{1/4}}^{2^{1/4}} 2 - x^4 \, dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2^{1/4}}^{2^{1/4}} = \left(2 \cdot 2^{1/4} - \frac{(2^{1/4})^5}{5} \right) - \left(2 \cdot - 2^{1/4} - \frac{(-2^{1/4})^5}{5} \right)$$

$$= 2 \cdot 2^{1/4} - \frac{(2^{1/4})^5}{5} + 2 \cdot 2^{1/4} - \frac{(2^{1/4})^5}{5}$$

$$= 4 \cdot 2^{1/4} - \frac{2 \cdot (2^{1/4})^5}{5} = 2^{1/4}\left(4 - \frac{2}{5} \cdot (2^{1/4})^4\right)$$

$$= 2^{1/4} \cdot \left(4 - \frac{2 \cdot 2}{5}\right) = 2^{1/4}\left(\frac{20}{5} - \frac{4}{5}\right) = \boxed{2^{1/4} \cdot \frac{16}{5}}$$

Question 94 : Calculer $s(\frac{1}{3})$ si $a(t) = 2\sqrt{t}$, $v(0) = 1$, $s(1) = -2$

($v(t) \leftarrow$ vitesse

$a(t) \leftarrow$ accélération

$s(t) \leftarrow$ distance)

• $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t)\, dt$

$v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = \int v(t)\, dt$

On va trouver $v(t)$ et s'en servir pour trouver $s(t)$

$*$ $v(t) = \int a(t)\, dt = \int 2\sqrt{t}\, dt = 2\int t^{1/2}\, dt$

$= 2 \cdot \dfrac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = 2 \cdot \dfrac{t^{3/2}}{3/2} + C$

$v(t) = \frac{4}{3} t^{3/2} + c$

énoncé $\Rightarrow$ $v(0) = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot 0^{3/2} + c = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow v(t) = \frac{4}{3} t^{3/2} + 1$

* $s(t) = \int v(t)\, dt = \int \frac{4}{3} t^{3/2} + 1 \, dt$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + t + c$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{t^{5/2}}{5/2} + t + c$$

$$s(t) = \frac{8}{15} t^{5/2} + t + c$$

énoncé $\Rightarrow$ $s(1) = -2 \Rightarrow \frac{8}{15} 1^{5/2} + 1 + c = -2$

$$c = -2 - \frac{8}{15} - 1 = -3 - \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{8}{15} t^{5/2} + t - 3 - \frac{8}{15}$$

$$* \; s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5/2} + \frac{1}{3} - 3 - \frac{8}{15}$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5/2} + \frac{5 - 3 \cdot 15 - 8}{15}$$

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{5/2} - \frac{48}{15} = \boxed{\frac{8}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{5/2} - \frac{16}{5}}$$

Question 98

La fonction de demande d'un produit est $p(x) = 26 - x^2$ et la fonction offre du même produit est $s(x) = x^2 + 2x + 2$

Déterminer le surplus du consommateur pour le produit

Rappel : $SC = \int_0^{q^*} (D(q) - p^*) \, dq$

p^* et q^* sont le prix et la quantité d'équilibre

* prix et quantité d'équilibre

Offre = Demande $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 26 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - 26 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -12 = 49$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-7}{2} = -4$$ X quantité ne peut pas être < 0

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$$

la quantité d'équilibre est $x^* = 3$

le prix d'équilibre est $p^* = p(3) = 26-3^2 = 26-9 = 17$

$$* \quad SC = \int_0^{x^*} (p(x) - p^*)\, dx = \int_0^3 26 - x^2 - 17 \, dx$$

$$= \int_0^3 9 - x^2 \, dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$= \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \overbrace{\left(9 \cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right)}^{0} = 27 - \frac{27}{3} = 27 - 9 = \boxed{18}$$

Question 99

la fonction de demande d'un produit est $p(x) = \frac{8}{x+1}$ et la fonction offre du même produit est $s(x) = x+3$.

Déterminer le surplus du producteur pour le produit

Rappel: $SP = \int_0^{q^*} (p^* - s(q))\, dq$

p^* et q^* sont le prix et la quantité d'équilibre

* Prix et quantité d'équilibre

Offre = demande $\iff$ $x+3 = \frac{8}{x+1}$ $\iff$ $(x+1)(x+3) = 8$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + x + 3 = 8$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + x + 3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4-6}{2} = -5$ X Une quantité ne peut être < 0

$x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4+6}{2} = 1$ ✓

la quantité d'équilibre est $x^* = 1$

le prix d'équilibre est $p^* = p(1) = \dfrac{8}{1+1} = 4$

$* \quad SP = \int_0^{x^*} (p^* - s(x)) \, dx$

$$= \int_0^1 (4 - (x+3))\, dx = \int_0^1 4 - x - 3\, dx$$

$$= \int_0^1 1 - x\, dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1^2}{2} - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$