Question 100 :

Résoudre l'équation $2^x = 3^{1-x}$

$2^x = 3^{1-x} \iff \ln(2^x) = \ln(3^{1-x})$ $\quad (2^x > 0 , 3^{1-x} > 0 \quad \forall x)$

$\iff x \ln(2) = (1-x) \cdot \ln(3)$ $\quad \ln(a^b) = b \ln(a)$

$\iff x \ln(2) = \ln(3) - x \ln(3)$

$\iff x \ln(2) + x \ln(3) = \ln(3)$

$\iff x (\ln(2) + \ln(3)) = \ln(3)$

$\iff x (\ln(2 \cdot 3) = \ln(3)$ $\quad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\iff x \ln(6) = \ln(3) \iff \boxed{x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(6)}}$

Question n° 1

Trouver la solution de l'équation $\ln(x+2) - \ln(x-4) = \ln(3)$

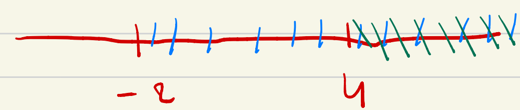
$*$ Ensemble de définition

Rappel : l'ensemble de définition de $\ln(x)$ est $]0, +\infty[$

. Il faut $x+2 > 0$ et $x-4 > 0$

$\Leftrightarrow$ $x > -2$ et $x > 4$

$\Leftrightarrow$ $x > 4$



$*$ solution

$\ln(x+2) - \ln(x-4) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln(3) + \ln(x-4)$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x+2) = \ln(3\cdot(x-4))$ $\quad (\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b))$

$\Leftrightarrow \quad e^{\ln(x+2)} = e^{\ln(3\cdot(x-4))}$

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 3\cdot(x-4)$ $\quad (e^{\ln x} = x \;;\; \ln(e^x) = x)$

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 3\cdot x - 12$

$\Leftrightarrow \quad x - 3x = -12 - 2$

$\Leftrightarrow \quad -2x = -14$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-14}{-2} = 7 > 4$

Donc la solution est $x = 7$

Question 102

Une nouvelle employée ouvre un compte (sans intérêt) et y dépose son salaire mensuel de 2400 $ qu'elle reçoit au début de chaque mois.

Durant chaque mois, elle dépense 40% du montant se trouvant dans son compte au début du mois.

- Quel est le solde de son compte au début du k-ième mois ?
- Au début de quel mois est-ce que le solde de son compte est le double de son salaire mensuel ?

* Solde du compte au début du k-ième mois

- Durant chaque mois, elle dépense 40% du montant dans le compte.

  Donc elle économise $100\% - 40\% = \underbrace{60\%}_{0,6}$ du montant

Mois 1	Mois 2	Mois 3
2400	$2400 + 2400 \times 0,6$	$2400 + 2400 \times 0,6 + 2400 \times 0,6^2$
$\times$	$\times$	$\times$
$0,6$	$0,6$	$0,6$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$2400 \cdot 0,6$	$2400 \times 0,6 + 2400 \times 0,6^2$	$2400 \times 0,6 + 2400 \times 0,6^2 + 2400 \times 0,6^3$

En suivant cette logique

le solde du compte au début du k-ième mois est

$$S_k = 2400 + 2400 \times 0{,}6 + \cdots + 2400 \times 0{,}6^{k-1}$$

$$= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}$$ où $a = 2400$

$r = 0{,}6$

série géométrique (chapitre 1)

Rappel : $S_k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = a\,\dfrac{(1-r^k)}{1-r}$

Donc $S_k = 2400\,\dfrac{(1-0{,}6^k)}{1-0{,}6} = \dfrac{2400}{0{,}4}(1-0{,}6^k)$

$$= \frac{2400}{\frac{4}{10}} (1 - 0{,}6^k) = \frac{2400 \cdot 10}{4} (1 - 0{,}6^k)$$

$$s_k = 6000 \cdot (1 - 0{,}6^k)$$

* k à partir duquel $s_k = 2 \cdot 2400 = 4800$

$$s_k = 4800 \Leftrightarrow 6000 \cdot (1 - 0{,}6^k) = 4800$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}6^k = \frac{4800}{6000} \left(= \frac{48}{60} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}6^k = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6^k = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}6^k) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad k \ln(0{,}5) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad \ln(a^b) = b\ln(a)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{k = \frac{\ln(1/5)}{\ln(0{,}5)}}$$

Question 103

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ k \ln(1+2x) & x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k est-ce que la dérivée $f'(0)$ existe ?

Rappel : • $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

• $\lim_{x \to a} g(x)$ existe si $\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$

Donc $f'(0)$ existe si $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

- $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = (k \ln(1+2x))'$ évalué en 0

Rappel : $\frac{d}{dx} \ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$$(k \ln(1+2x))' = k(\ln(1+2x))' = k \frac{(1+2x)'}{(1+2x)} = k \cdot \frac{2}{1+2x}$$

$$x = 0 \rightarrow k \cdot \frac{2}{1+0} = \boxed{2k}$$

- $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = (x)'$ évalué en 0 $= \boxed{1}$

- Donc la dérivée existe si $1 = 2k \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$

Question 104

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(1+x)$$

calculer $f'(0)$

* $f'(x) = (xe^{-x})' + (\ln(1+x))'$

$$= (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' + \underbrace{\frac{(1+x)'}{1+x}}_{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

$$= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot \underbrace{(-x)' e^{-x}}_{(e^{u})' = u' e^{u}} + \frac{1}{1+x}$$

$$= e^{-x} + x \cdot -1 \cdot e^{-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$* \quad f'(0) = e^{-0} - 0 \cdot e^{-0} + \frac{1}{1+0}$$

$$= 1 - 0 + 1$$

$$\boxed{f'(0) = 2}$$

Question 105

Evaluer $\int_0^1 \frac{x}{x+1} \, dx$

Posons $u = x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

Donc $\int_0^1 \frac{x}{x+1} \, dx = \int_{0+1}^{1+1} \frac{u-1}{u} \, du$

$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$

$$= \int_1^2 \frac{u}{u} - \frac{1}{u} \, du$$

$$= \int_1^2 1 - \frac{1}{u} \, du$$

$$= \left[u - \ln|u| \right]_1^2$$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$$= 2 - \ln|2| - (1 - \ln|1|)$$

$$= 2 - \ln(2) - 1 + \underbrace{\ln(1)}_{0}$$

$$= \boxed{1 - \ln(2)}$$

Question 106

Trouver la famille de primitives de $f(x) = (x^2-1)\ln(x)$

$$\int (x^2-1)\ln(x)\,dx$$

posons

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^2 - 1 \qquad v = \int x^2 - 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x$

Par intégration par partie,

$$\int (x^2-1)\ln(x)\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)dx$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \int \frac{x^2}{3} - 1 \, dx$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - x + C\right)$$

$$= \boxed{\ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x^3}{9} + x + C'}$$

Question 107

Trouver la famille de primitives de $x^2 \ln(x^3)$

- $x^2 \ln(x^3) = x^2 . \; 3 \ln(x)$

$\ln(a^b) = b \ln a$

- $\int x^2 \ln(x^3)\, dx = \int 3x^2 \ln(x)\, dx$

posons $u = \ln(x)$ $\quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 3x^2$ $\quad v = \int 3x^2\, dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$

donc $\int 3x^2 \ln(x)\,dx = x^3 \cdot \ln(x) - \int x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x^3 \cdot \ln(x) - \int x^2\,dx$

$= \boxed{x^3 \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{3} + C}$

Question 108

Trouver la Famille de primitives de $\frac{1}{x\ln(x)}$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$$

posons $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow x\,du = dx$

Donc $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{x \cdot u} \cdot x\,du$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \boxed{\ln|\ln(x)| + c}$$