MAT 3777
Échantillonnage et sondages

Chapitre 7
Échantillonnage systématique

P. Boily (uOttawa)

Session d'hiver – 2022

Aperçu

7.1 – Motivation

Depuis la venue de générateurs de nombres pseudo-aléatoires facile à accéder (Excel, R, SAS, etc.), il n'est pas bien difficile de prélever un EAS $\mathcal{Y}$ de taille n à même une population $\mathcal{U}$ de taille N (en supposant que nous possédions une base de sondage appropriée).

Cependant, il est toujours possible que l'échantillon réalisé **ne soit pas représentatif** de la population: un EAS de pays ne comportant ni la Chine, ni l'Inde, par exemple, n'est pas très utile si l'on cherche à estimer la population moyenne des pays de la planète.

Dans certains cas, on peut utiliser un **plan d'échantillonnage systématique** (SYS) afin d'optimiser la probabilité que l'échantillon aléatoire $\mathcal{Y}$ représente bien la population.

Comment prélever un échantillon systématique $1-$parmi$-M$ de taille n (ou $n+1$) d'une liste ordonnée de taille N:

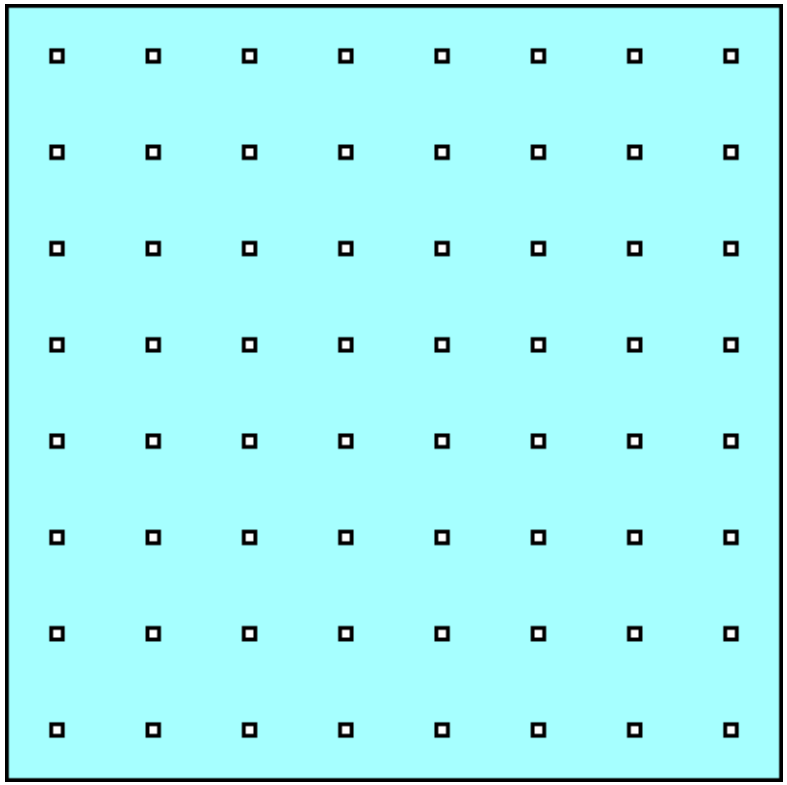
1. Déterminer la partie entière $M = \lfloor \frac{N}{n} \rfloor$.

2. Choisir, de manière aléatoire, un entier γ parmi $\{1, 2, \ldots, M\}$.

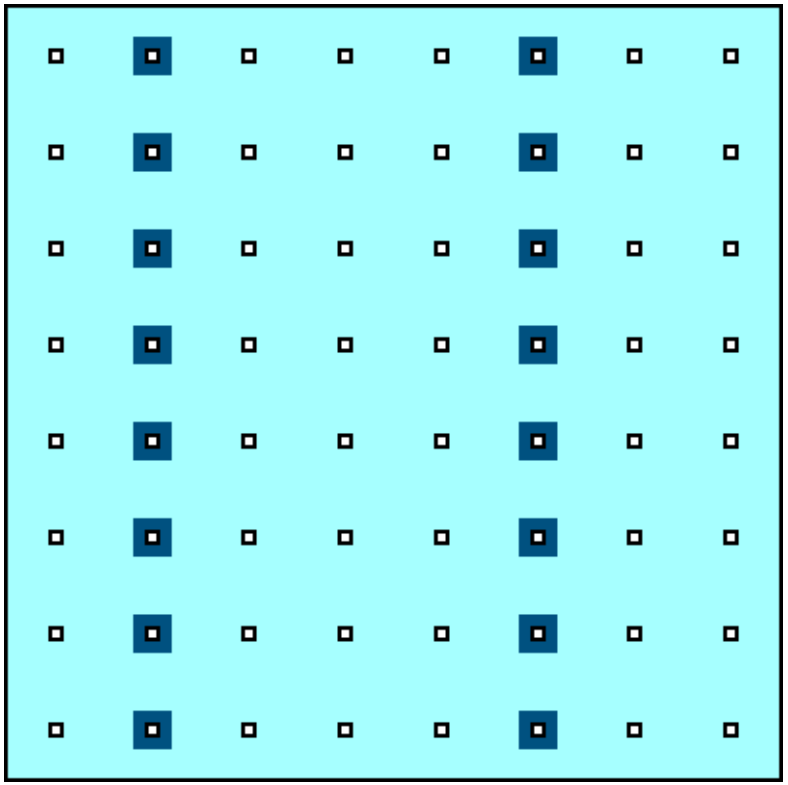
3. L'échantillon $\mathcal{Y}$ contient alors les valeurs correspondant aux unités

$$\underbrace{\gamma, \gamma + M,\ \gamma + 2M,\ \ldots\ , \gamma + (n-1)M}_{n \text{ unités}},\ \underbrace{\gamma + nM}_{\text{si } \gamma + nM \leq N}$$

Si l'ordre dans lequel les unités de la base de sondage est fixe, il n'existe que M différents échantillons SYS de taille n (ou $n+1$, dans certains cas).



Population



Échantillon systématique $1-$parmi-4

Exemple:
L'ensemble de données Gapminder contient des renseignements socio-économiques sur 185 pays en 2011. Que sont l'espérance de vie et la population moyenne des pays de la planète?

Solution: On modifie quelque peu le code nous permettant d'accéder à l'ensemble de données:

```
> gapminder.SYS <- gapminder %>% filter(year==2011) %>%
    select(country, life_expectancy, population)
> N=nrow(gapminder.SYS)
```

Il y a toujours 185 unités dans l'ensemble de donnés. Si on s'intéresse à un SYS de taille $n = 20$, mettons, l'entier M devient:

```
> n=20
> (M=floor(N/n))
```

```
[1] 9
```

Le vecteur d'observations $0, M, 2M, \ldots, nM$ prend la forme :

```
> index = M*(0:n)
```

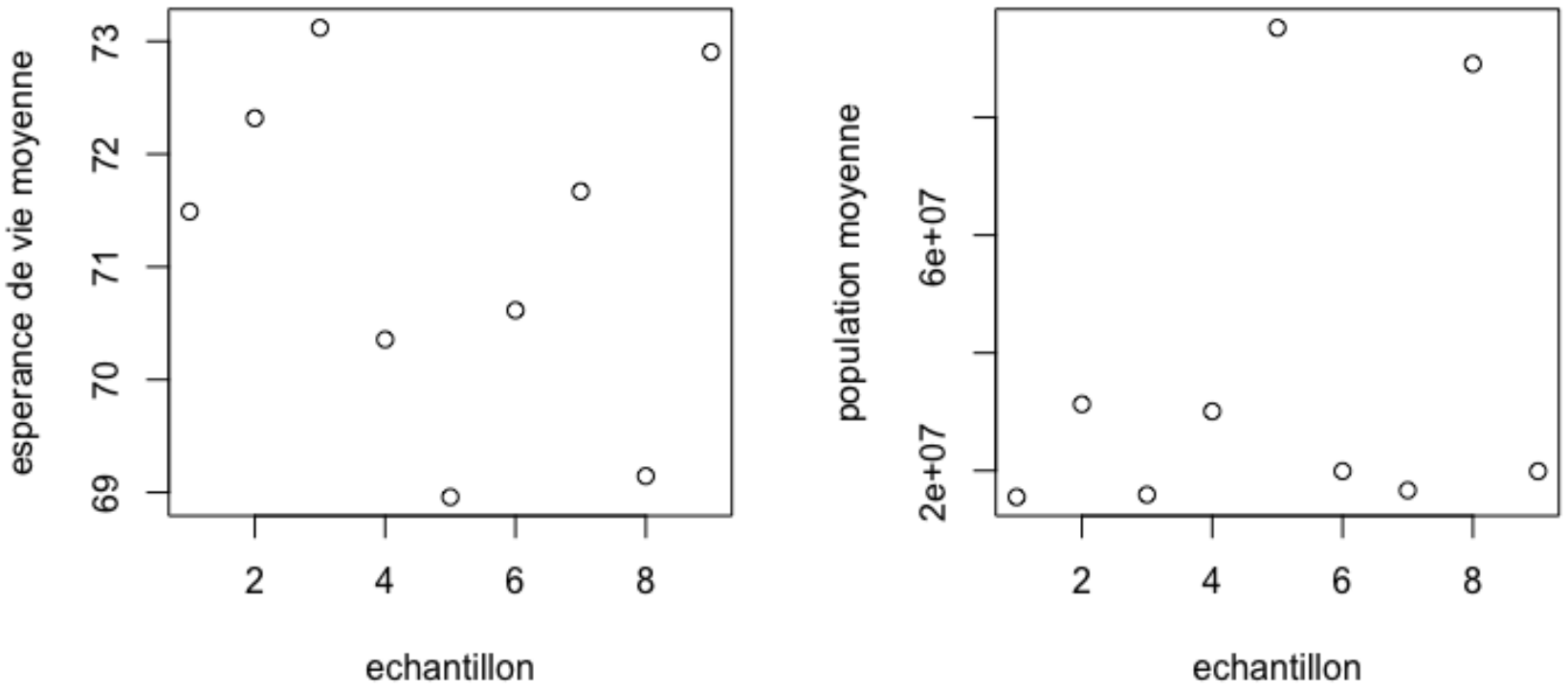
```
 [1]   0   9  18  27  36  45  54  63  72  81  90  99 108 117 126 135 144
[18] 153 162 171 180
```

Nous allons construire $M = 9$ échantillons $\mathcal{Y}_i$, $i = 1, \ldots, 9$, en supposant que les les unités apparaîssent en ordre alphabétique de pays (en anglais) dans l'ensemble de données, pour chacune des variables.

```
> moy.SYS.life_exp = c() # initialization - esperance de vie
> moy.SYS.pop = c()    # initialization - population

> for(j in 1:M){ # tous les echantillons SYS de taille n/n+1
    index.tmp = j + index
    index.tmp <- index.tmp[index.tmp < N+1] # retention des indices <= N
    sample.sys = gapminder.SYS[index.tmp,2:3]
    moy.SYS.life_exp[j]=mean(sample.sys$life_expectancy)
    moy.SYS.pop[j]=mean(sample.sys$population)
  }

# graphiques
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(moy.SYS.life_exp, xlab="echantillon", ylab="esperance de vie
  moyenne")
> plot(moy.SYS.pop, xlab="echantillon", ylab="population moyenne")
```



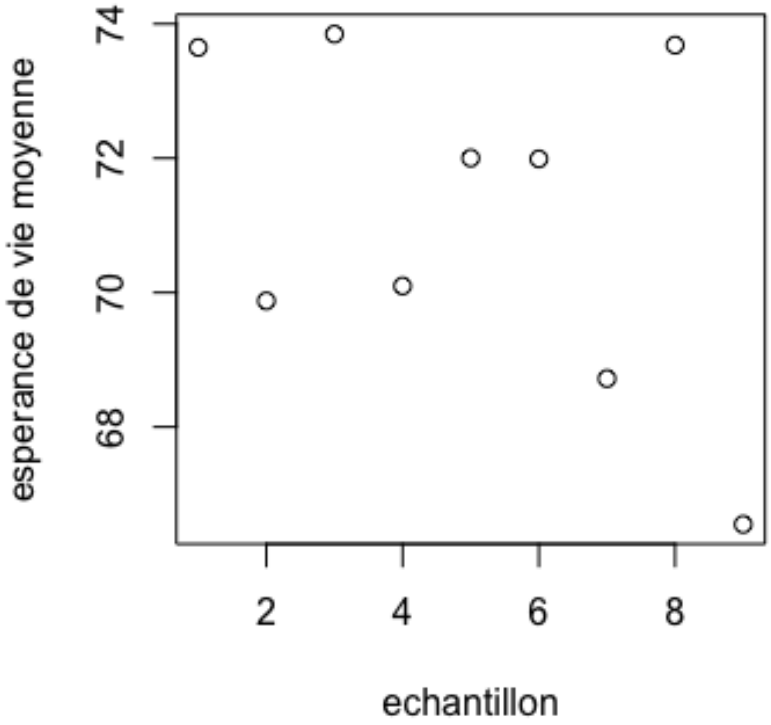
Pourriez vous identifier l'échantillon qui contient la Chine ou l'Inde?

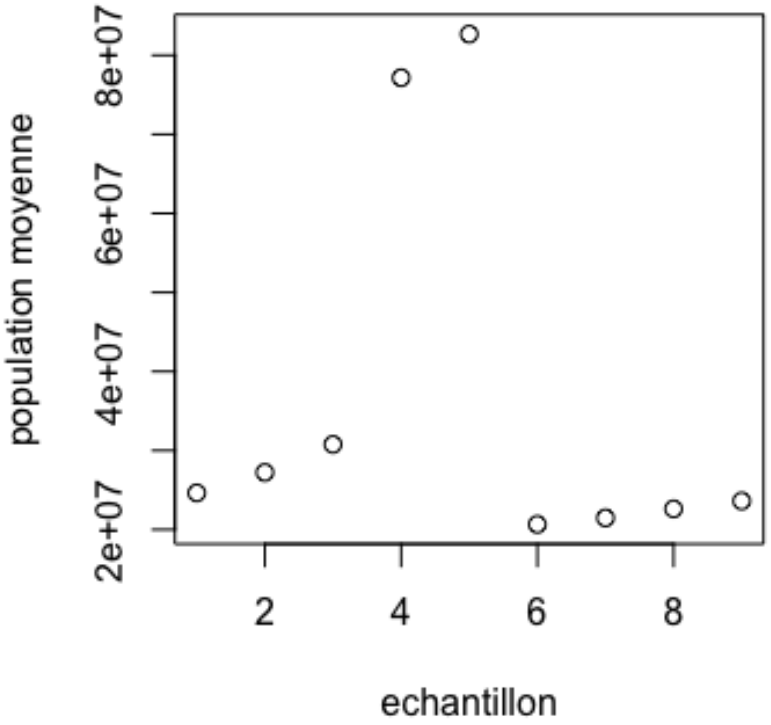
Et si on change l'ordre dans lequel les pays sont énumérés au départ?

```
> gapminder.SYS <- gapminder.SYS[order(gapminder.SYS$population),]

> for(j in 1:M){ # tous les echantillons SYS de taille n/n+1
    index.tmp = j + index
    index.tmp <- index.tmp[index.tmp < N+1]
    sample.sys = gapminder.SYS[index.tmp,2:3]
    moy.SYS.life_exp[j]=mean(sample.sys$life_expectancy)
    moy.SYS.pop[j]=mean(sample.sys$population)
  }

> par(mfrow=c(1,2))
> plot(moy.SYS.life_exp, xlab="echantillon", ylab="esperance de vie
  moyenne")
> plot(moy.SYS.pop, xlab="echantillon", ylab="population moyenne")
```



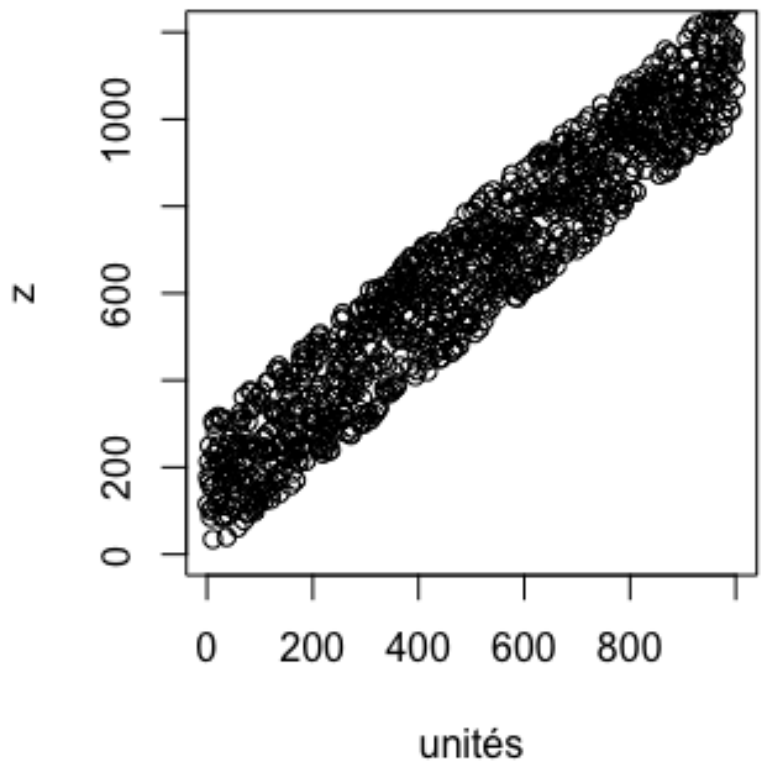


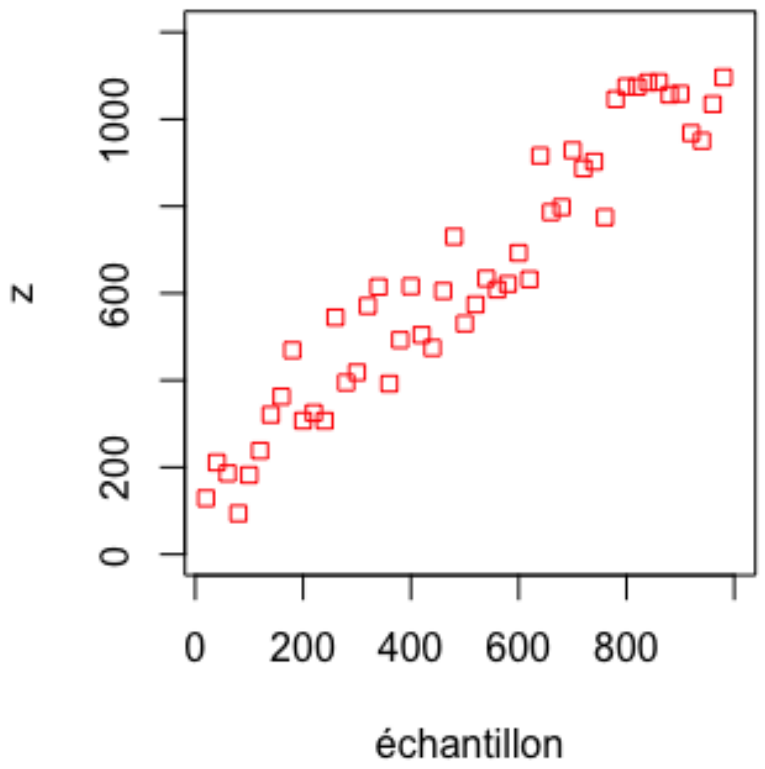
Les résultats sont semblables en énumérant selon l'espérance de vie.

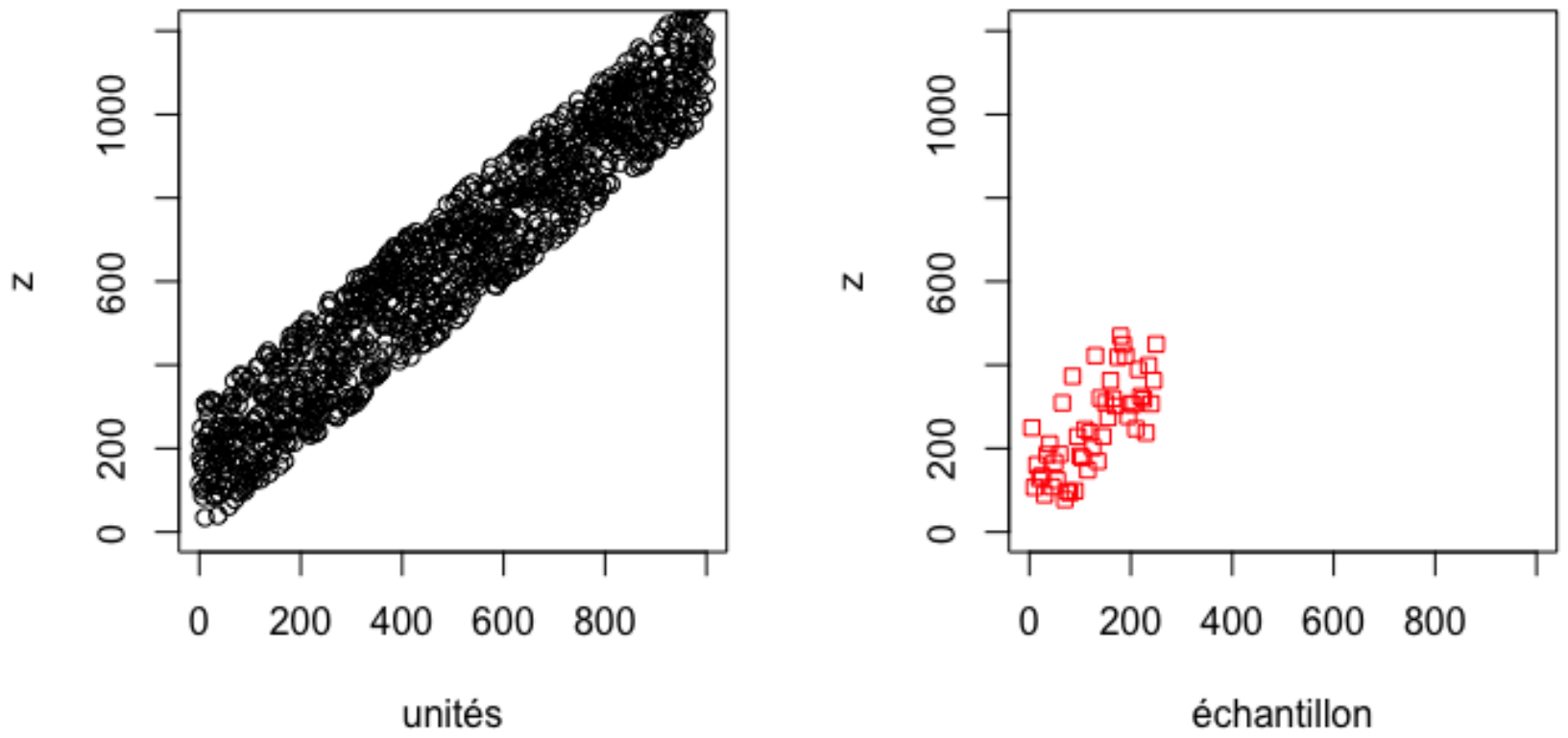
En général, s'il y a corrélation entre le **rang de l'unité** dans la base de sondage et la **valeur de la variable d'intérêt**, la variance d'échantillonnage de l'estimateur SYS sera **plus faible** que celle de l'estimateur EAS (car l'échantillon est **plus propice** à être représentatif de la population).

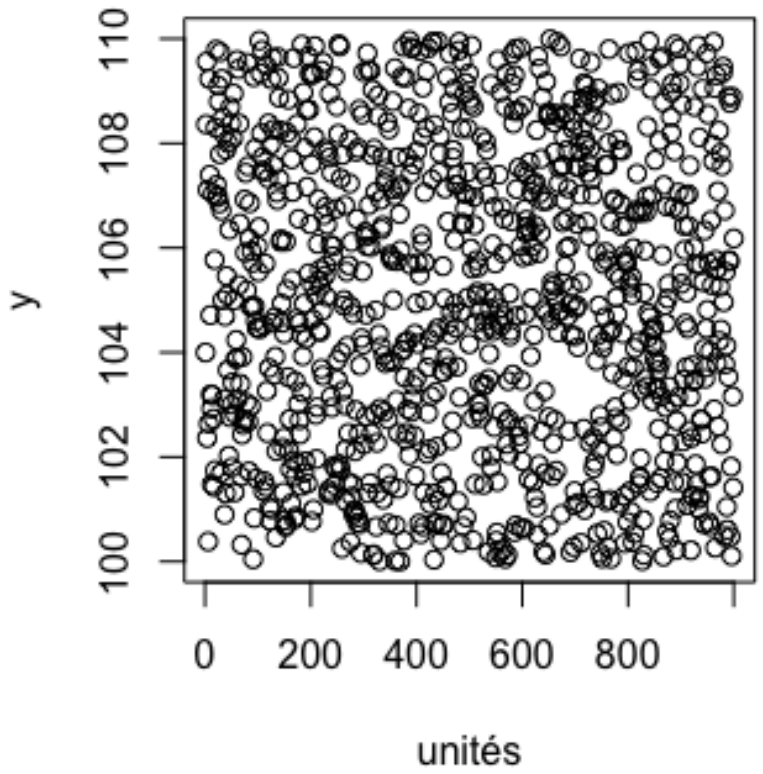
S'il n'y a pas de telle corrélation, l'échantillon SYS est sensiblement un échantillon EAS, et les variances d'échantillonnage sont comparables (un SYS a autant de chances d'être **représentatif** de la population qu'un EAS).

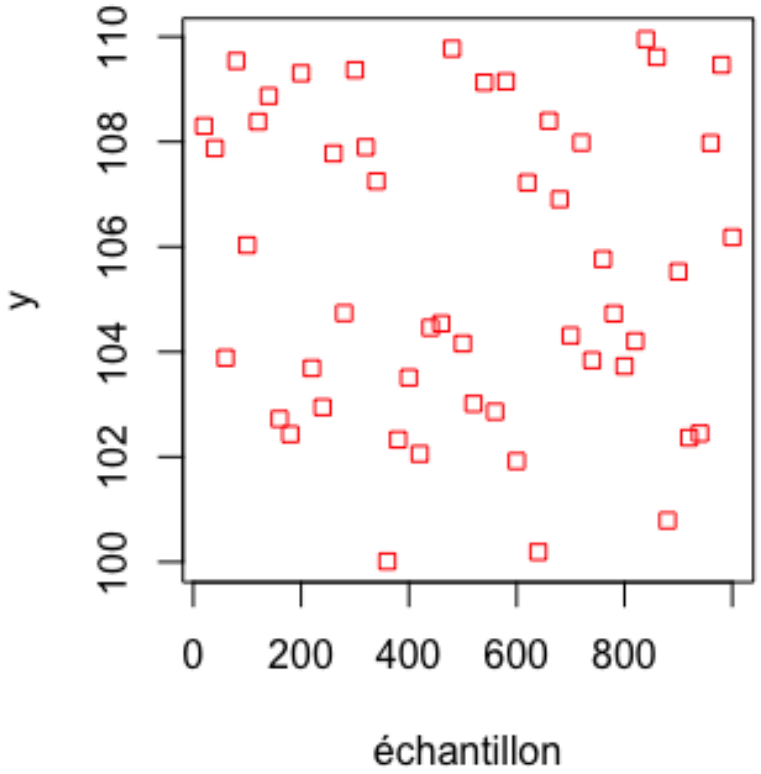
Finalement, si le 'pas' M est aligné avec la périodicité des valeurs de la variable d'intérêt, c'est le contraire: la variance d'échantillonnage d'un SYS est plus large que celle d'un EAS (un SYS est alors **moins représentatif** de la population qu'un EAS).

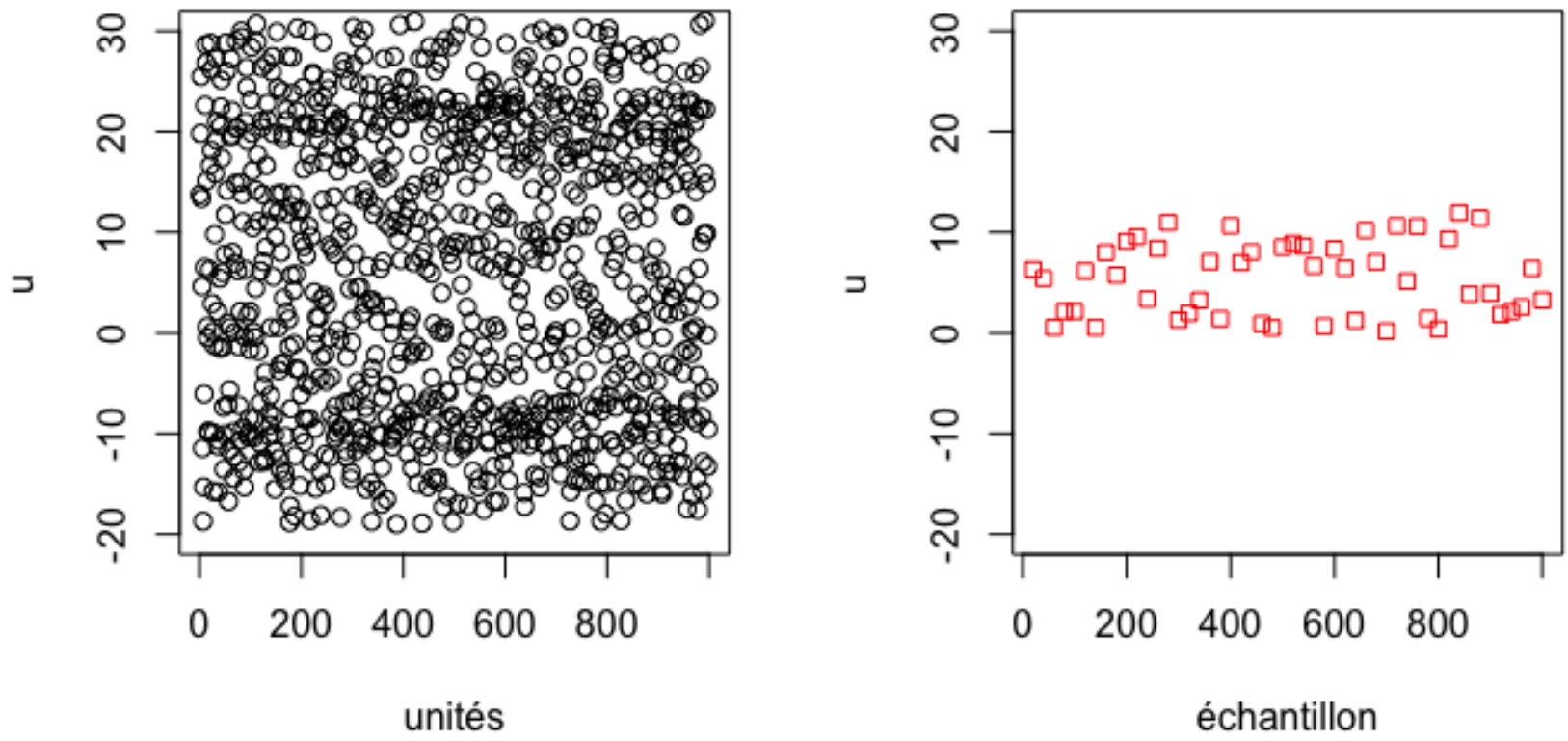

z
0
200
600
1000
0
200
400
600
800
unités

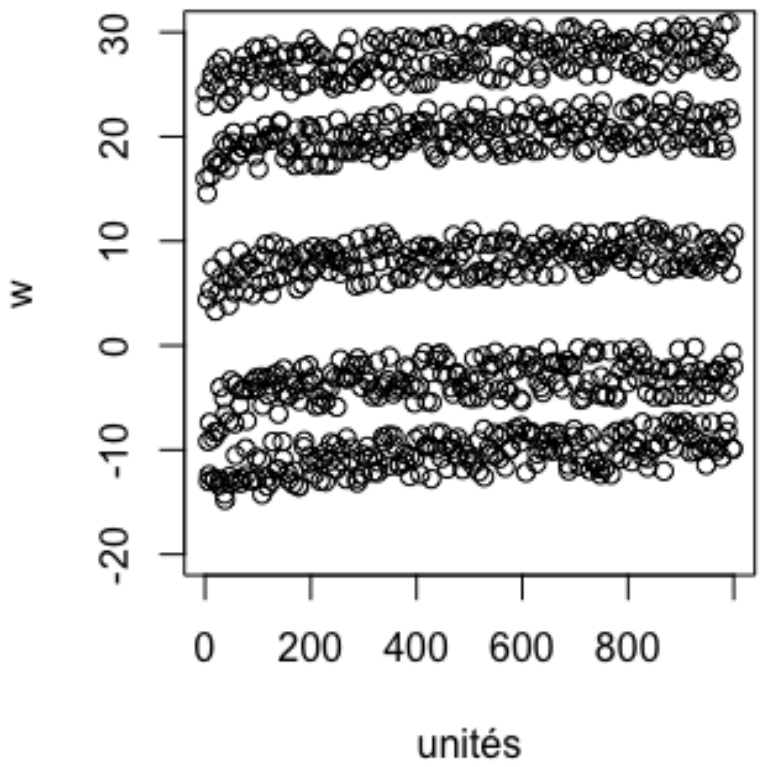

z
0
200
600
1000
0
200
400
600
800
échantillon

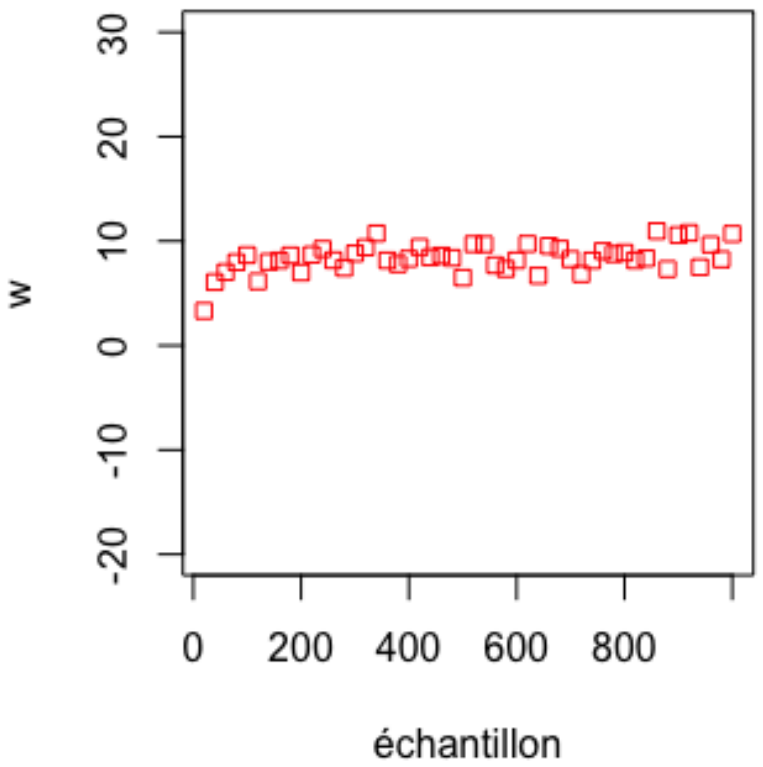

z
0
200
600
1000
0
200
400
600
800
unités
z
0
200
600
1000
0
200
400
600
800
échantillon


y
100
102
104
106
108
110
0
200
400
600
800
unités


y
100
102
104
106
108
110
0
200
400
600
800
échantillon


u
30
20
10
0
-10
-20
0
200
400
600
800
unités
u
30
20
10
0
-10
-20
0
200
400
600
800
échantillon


w
30
20
10
0
-10
-20
0
200
400
600
800
unités


w
30
20
10
0
-10
-20
0
200
400
600
800
échantillon

7.2 – Échantillonnage systémtique et EAS

Si l'ordre dans lequel les unités sont énumérées dans la base de sondage est **aléatoire** (⚠ ce n'est pas toujours facile à démontrer), on peut tout simplement considérer que l'échantillon

$$\mathcal{Y}_{\text{SYS}} = \underbrace{\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n\}}_{\{u_\gamma, u_{\gamma+M}, \ldots, u_{\gamma+(n-1)M}\}} \subseteq \mathcal{U}$$

de taille $n \approx \frac{N}{M}$ est en fait un **échantillon aléatoire simple** de taille n.

Dans ce cas, la théorie développée au chapitre 2 pour les EAS demeure valide.

7.2.1 – Estimation de la moyenne μ

L'expression

$$\overline{y}_{\text{SYS}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

est un estimateur **sans biais** de la moyenne μ de $\mathcal{U}$, et sa **marge d'erreur sur l'estimation** est tout simplement

$$B_{\mu;\text{SYS}} \approx \hat{B}_{\mu;\text{SYS}} = 2\sqrt{\hat{\text{V}}(\overline{y}_{\text{SYS}})} = 2\sqrt{\frac{s^2_{\text{SYS}}}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}, \text{ où } s^2_{\text{SYS}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_{\text{SYS}})^2;$$

l'**intervalle de confiance de μ à environ** 95% est alors

$$\text{IC}_{\text{SYS}}(\mu; 0.95): \quad \overline{y}_{\text{SYS}} \pm \hat{B}_{\mu;\text{SYS}}.$$

7.2.2 – Estimation du total τ

L'expression

$$\hat{\tau}_{\text{SYS}} = N\overline{y}_{\text{SYS}} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

est un estimateur **sans biais** du total τ de $\mathcal{U}$, et sa **marge d'erreur sur l'estimation** est tout simplement

$$B_{\tau;\text{SYS}} \approx \hat{B}_{\tau;\text{SYS}} = 2N\sqrt{\hat{\text{V}}(\overline{y}_{\text{SYS}})} = 2N\sqrt{\frac{s^2_{\text{SYS}}}{n}\Big(1-\frac{n}{N}\Big)};$$

l'**intervalle de confiance de τ à environ** 95% est alors

$$\text{IC}_{\text{SYS}}(\tau; 0.95): \quad \hat{\tau}_{\text{SYS}} \pm \hat{B}_{\tau;\text{SYS}}.$$

7.2.3 – Estimation d'une proportion p

Si $y_i \in \{0, 1\}$ dénote l'absence ou la présence d'une caractéristique, l'expression

$$\hat{p}_{\text{SYS}} = \overline{y}_{\text{SYS}}$$

est un estimateur **sans biais** de la proportion p des observations de $\mathcal{U}$ possédant la caractéristique en question, et sa **marge d'erreur sur l'estimation** est tout simplement

$$B_{p;\text{SYS}} \approx \hat{B}_{p;\text{SYS}} = 2\sqrt{\hat{\text{V}}(\hat{p}_{\text{SYS}})} = 2\sqrt{\frac{\hat{p}_{\text{SYS}}(1-\hat{p}_{\text{SYS}})}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)};$$

l'**intervalle de confiance de p à environ** 95% est alors

$$\text{IC}_{\text{SYS}}(p; 0.95) : \quad \hat{p}_{\text{SYS}} \pm \hat{B}_{p;\text{SYS}}.$$

7.3 – Échantillonnage systémtique et EPG

En pratique, SYS est equivalent à un EPG de taille $m = 1$, où chaque grappe correspond à un des échantillons SYS $1-$parmi$-M$.

L'expression

$$\overline{y}_G = \frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_{i_k}} y_{i_k,j}}{\sum_{k=1}^{m} N_{i_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} y_{i_k}}{\sum_{k=1}^{m} N_{i_k}},$$

où l'on utilise la notation du chapitre 6, est ainsi un estimateur **biaisé** de la **moyenne de population**, μ.

Si la **taille moyenne des grappes** est dénotée par $\overline{N} = \frac{N}{M}$, la **variance d'échantillonnage** est

$$\mathrm{V}(\overline{y}_G) \approx \frac{1}{\overline{N}^2} \cdot \frac{1}{m}\Big(\frac{M-m}{M-1}\Big) \cdot \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M}(\underbrace{\tau_\ell - \mu N_\ell}_{=N_\ell(\mu_\ell-\mu)})^2 := \frac{1}{\overline{N}^2} \cdot \frac{\sigma_G^2}{m}\Big(\frac{M-m}{M-1}\Big),$$

et l'**intervalle de confiance de μ à environ 95%** est alors

$$\mathrm{IC}_{\mathrm{G}}(\mu; 0.95) : \quad \overline{y}_G \pm 2\sqrt{\mathrm{V}(\overline{y}_G)}.$$

Si la taille moyenne des grappes $\overline{N}$ est inconnue, on la remplace tout simplement par

$$\overline{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} N_{i_k}.$$

L'estimateur du **total de la population** τ que l'on utilise est alors

- $N\overline{y}_G$, lorsque l'on connait le nombre d'unités N dans la population, ou
- $M\overline{y}_T$, où $\overline{y}_T$ représente la **moyenne** (empirique) **des totaux de grappes dans l'échantillon**, lorsque l'on ne connaît que M.

Par conséquent, les variances d'échantillonnage sont

$$\mathrm{V}(N\overline{y}_G) \approx M^2 \cdot \frac{\sigma_G^2}{m}\left(\frac{M-m}{M-1}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(M\overline{y}_T) \approx M^2 \cdot \frac{\sigma_T^2}{m}\left(\frac{M-m}{M-1}\right),$$

où σ_G^2 et σ_T^2 sont obtenues comme au chapitre 6. On peut alors construire les **intervalles de confiance de τ à environ** 95% de la manière habituelle.

C'est simple, non?


[record scratch]

L'échantillon contient exactement $m = 1$ grappe, c'est donc dire que $\overline{n} = n$. Le problème ne s'arrête pas là – puisque on ne connait pas σ_G^2 ou σ_T^2 en général, on utilise les variances empiriques

$$\hat{\mathrm{V}}(\overline{y}_G) \approx \frac{1}{\overline{N}^2} \cdot \frac{1}{m}\left(1 - \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} (y_{i_k} - \overline{y}_G N_{i_k})^2$$

$$\hat{\mathrm{V}}(M\overline{y}_T) \approx M^2 \cdot \frac{1}{m}\left(1 - \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} (y_{i_k} - \overline{y}_T)^2$$

Si $m = 1$, ces variances n'exitent pas. Comment se sort-on de ce pétrin?

Si on ne peut traiter le SYS comme si c'était un EAS (pour quelque raison que ce soit), la solution est de **prélever des échantillons SYS additionnels (répliques) et de traiter le tout comme un EPG.**