MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 1
Les séries

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Aperçu

Scénario – Placements et intérêt

Exemple: un montant de $50\$$ est déposé dans un compte en banque à chaque début de mois durant deux ans. Le taux d'intérêt annuel est de 6%, composé mensuellement. Quel est le solde du compte après 25 dépôts mensuels?

Comment s'y prend-on pour résoudre des problèmes de ce genre?

Scénario – Placements et intérêt

Exemple: un montant de $50\$$ est déposé dans un compte en banque à chaque début de mois durant deux ans. Le taux d'intérêt annuel est de 6%, composé mensuellement. Quel est le solde du compte après 25 dépôts mensuels?

Comment s'y prend-on pour résoudre des problèmes de ce genre?

Solution: le taux d'intérêt est un taux annuel; l'**intérêt mensuel** est

$$\frac{0.06}{12} = 0.005 = 0.5\%.$$

En général, le solde au début du mois (juste après le dépôt mensuel) est

$$\begin{aligned}\text{solde au début du mois} &= \text{solde à la fin du mois précédent} + \text{dépôt mensuel}\\ &= (\text{solde au début du mois précédent} + \text{intérêt mensuel})\\ &\qquad + \text{dépôt mensuel.}\end{aligned}$$

Si S_n dénote le solde au début du $n-$ième mois ($n \geq 2$), on a alors

$$\begin{aligned}S_n &= S_{n-1} + 0.005S_{n-1} + 50\\ &= 1.005S_{n-1} + 50.\end{aligned}$$

Le solde S_n dépend du solde S_{n-1}, qui dépend lui-même du solde S_{n-2}, et ainsi de suite $\Rightarrow$ c'est une **relation de récurrence**.

Ceci ne nous donne toujours pas S_n directement: il faut remonter la pente.

Le solde S_1 est le dépôt initial (50). Les soldes S_2, S_3, S_4, et S_n sont

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{solde au début du premier mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_1 + 0.005S_1 + 50 \\ &= 1.005S_1 + 50 \\ &= (1.005)50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{solde au début du second mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_2 + 0.005S_2 + 50 \\ &= 1.005S_2 + 50 \\ &= 1.005\left((1.005)50 + 50\right) + 50 = (1.005)^2 50 + (1.005)50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \text{solde au début du troisième mois} + \text{intérêt mensuel} + \text{dépôt mensuel} \\ &= S_3 + 0.005S_3 + 50 = 1.005S_3 + 50 \\ &= 1.005\left((1.005)^2 50 + (1.005)50 + 50\right) + 50 \\ &= (1.005)^3 50 + (1.005)^2 50 + (1.005)50 + 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (1.005)^{n-1}50 + (1.005)^{n-2}50 + \cdots + (1.005)50 + 50 \\ &= 50\left((1.005)^{n-1} + (1.005)^{n-2} + \cdots + (1.005) + 1\right). \end{aligned}$$

Ainsi, le solde après $n = 25$ dépôts est

$$S_{25} = 50\left((1.005)^{24} + (1.005)^{23} + \cdots + (1.005) + 1\right) \approx 1327.96\$.$$

⚠ **Lorsque n est élevé, le calcul direct est déconseillé.**

1.1 – Les séries

On se sert des **séries** pour résoudre ce genre de problème.

Le symbole $\sum$ (prononcé "somme") est utilisé pour simplifier les expressions contenant la somme de plusieurs termes: par exemple

$$\sum_{i=2}^{7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \quad \text{quelque soient les termes } a_i.$$

Les termes a_i sont additionnés successivement, de a_2 (borne inférieure: $i = 2$) jusqu'à a_7 (borne supérieure: $i = 7$), inclusivement.

Exemples:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i =$

2. $\displaystyle\sum_{i=2}^{19} 2i =$

3. Dans le scénario du début du chapitre, S_{25} peut s'exprimer par:

$$S_{25} = 50 + 50(1.005) + \cdots + 50(1.005)^{24} =$$

Formules

Certaines formules spécifiques peuvent faciliter l'**évaluation** des séries:

$$\sum_{i=1}^{k} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ fois}} = k, \qquad \sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Les formules suivantes permettent de simplifier les combinaisons de séries:

$$\sum_{i=1}^{k} n a_i = n \sum_{i=1}^{k} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Exemples:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} 3 =$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} (1+i) =$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{19} (1+i)^2 =$

1.2 – Les séries géométriques

Si a et r sont des constantes, une série de la forme

$$\sum_{i=0}^{k} ar^i = a + ar + \cdots + ar^k$$

est dîte **géométrique**. La série du début du chapitre est une série géométrique (avec $a = 50, r = 1.005$).

On calcule la valeur d'une série géométrique de la manière suivante: soit

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} ar^i = a + ar + \cdots + ar^k.$$

Alors

$$rS_{k+1} = r(a + ar + \cdots + ar^k) = ar + ar^2 + \cdots + ar^{k+1}$$

et

$$\begin{aligned}(1-r)S_{k+1} &= S_{k+1} - rS_{k+1} \\ &= a + ar + \cdots + ar^k - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{k+1}) \\ &= a - ar^{k+1},\end{aligned}$$

d'où

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} ar^i = \frac{a\left(1 - r^{k+1}\right)}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Si $r = 1$, la série géométrique est en fait une série de la forme

$$\sum_{i=0}^{k} ar^i = a\sum_{i=0}^{k} 1 = a(k+1).$$

C'est ainsi que nous avons obtenu la valeur de S_{25} au tout début du chapitre: en effet,

$$\begin{aligned} S_{25} &= \sum_{i=0}^{24} 50(1.005)^i \\ &= \frac{50\left(1-(1.005)^{25}\right)}{1-1.005} \approx 1327.96. \end{aligned}$$

Exemples:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^i =$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} (2)^i =$

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{127} 3(-1)^i =$

4. À chaque heure, une patiente reçoit une dose de 100mg d'un médicament; en une heure, son corps élimine 70% du médicament qui s'y trouvait avant l'administration de la nouvelle dose. Quelle est la quantité de médicament dans son corps immédiatement après la sixième dose?

 Solution: soit Q_n la quantité de médicament dans son corps immédiatement après la $n-$ième dose. Pour $n \geq 2$, on a

$$Q_n = 0.3Q_{n-1} + 100, \quad Q_1 = 100.$$

 Q_n dépend de Q_{n-1}, qui dépend de Q_{n-2}, etc.

 Pour Q_2 on a:

$$Q_2 = 0.3Q_1 + 100 = (0.3)100 + 100.$$

Pour Q_3, on a

$$\begin{aligned} Q_3 = 0.3Q_2 + 100 &= 0.3\left((0.3)100 + 100\right) + 100 \\ &= (0.3)^2 100 + (0.3)100 + 100. \end{aligned}$$

En général, la quantité Q_n est donnée par

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} 100(0.3)^i.$$

Selon la formule, $Q_6 = \frac{100(1-(0.3)^6)}{1-0.3} \approx 142.7530$mg.

5. Si la patiente continue de recevoir une nouvelle dose de 100mg à chaque heure, indéfiniement, et si son corps continue d'éliminer 70% du médicament présent dans son corps à chaque heure, que se produit-il?

   Solution: après 6 doses, il y a 142.7530mg de médicament dans son corps; après 9 et 11 doses, il y en a respectivement

   $$Q_9 = \frac{100(1-(0.3)^9)}{1-0.3} \approx 142.8543;\ Q_{11} = \frac{100(1-(0.3)^{11})}{1-0.3} \approx 142.8569.$$

   En fait, pour toute dose suivant la douzième, les quantités Q_n ont les même quatre premières décimales: par exemple, $Q_{17} = 142.8571...$ et $Q_{2283726} = 142.8571...$

Les séries infinies

Une **série infinie** est une série pour laquelle il n'y a pas de borne supérieure.

Exemple:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} =$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} =$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i =$

4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 100(0.3)^i =$

⚠ **les séries infinies ne prennent pas toutes une valeur.**

Une série sans valeur est **divergente**; autrement, elle est **convergente**.

En général, on détermine la convergence d'une série à l'aide de méthodes sophistiquées (on en reparle au chapitre 9).

Dans le cas des séries **géométriques infinies**, la règle est simple: soit

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

une série géométrique infinie. La série converge si et seulement si $|r| < 1$.

(C'est-à-dire que la série converge si $|r| < 1$, et qu'elle diverge si $|r| \geq 1$.)

Si la série géométrique infinie converge, sa valeur est

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}.$$

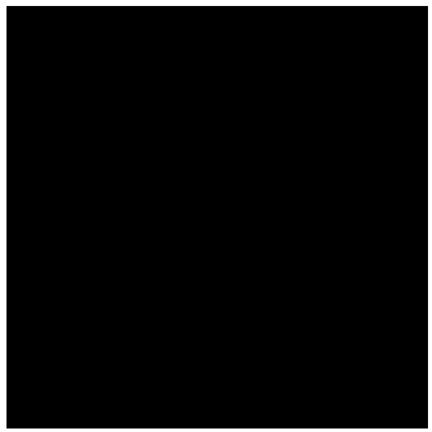
Exemples

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$ est divergente puisque $|r| = |2| \geq 1$.

   Si on essaie d'utiliser la formule ci-dessus pour une série divergente, le résultat est souvent absurde: dans ce cas, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1 \quad ⚠$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.



$$S_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_1 = S_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_3 = S_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_4 = S_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_5 = S_4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_6 = S_5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{63}{32} + \frac{1}{64} = \frac{127}{64}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1+\frac{1}{2}+\cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S_7 = S_6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{64} + \frac{1}{128} = \frac{255}{128}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$, puisque $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$ et $a = 1$.

$$S = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 2\left(\frac{-3}{4}\right)^i = 2 + 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots = \frac{2}{1+3/4} = \frac{8}{7}$, puisque $|r| = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4} < 1$ et $a = 1$.

4. Quand la borne inférieure n'est pas $i = 0$, on doit commencer par ré-arranger les termes:

$$\sum_{i=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

5. Le nombre rationnel

$$0.181818181818181818181818\ldots$$

peut s'exprimer à l'aide de la série géométrique

$$0.18 + 0.0018 + 0.000018 + 0.00000018 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 0.18 \left(\frac{1}{100}\right)^i.$$

Selon la règle de convergence, cette série converge puisque $|r| = \frac{1}{100} < 1$; elle prend donc la valeur

$$\frac{0.18}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0.18}{\frac{99}{100}} = \frac{100(0.18)}{99} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

6. À la longue, la patiente se retrouve avec un quantité

$$Q_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} 100(0.3)^i = \frac{100}{1-0.3} = \frac{100}{0.7} \approx 142.8571421857141\ldots.$$

7. $\sum_{i=1}^{\infty} i = 1+2+3+\cdots$ n'est pas une série géométrique.
La règle de convergence ne s'applique pas; évidemment, la série diverge.

8. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ n'est pas une série géométrique.
La règle de convergence ne s'applique pas; est-il évident qu'elle diverge?

k	Somme partielle S_k	k	Somme partielle S_k	k	Somme partielle S_k
1	1.00	11	3.02	51	4.52
2	1.50	12	3.10	52	4.54
3	1.83	13	3.18	53	4.56
4	2.08	14	3.25	54	4.58
5	2.28	15	3.32	55	4.59
6	2.45	16	3.38	56	4.61
7	2.59	17	3.44	57	4.63
8	2.72	18	3.50	58	4.65
9	2.83	19	3.55	59	4.66
10	2.93	20	3.60	60	4.68

$$S = ???$$

1.3 – Les séries de paiements

L'**intérêt** est une somme monétaire qu'une banque offre à un client en rénumération de l'usage qu'elle fait de l'argent qu'il dépose chez elle.

Une somme A est placée à un taux d'intérêt de $i\%$. Supposons que l'intérêt reçu est automatiquement re-déposé dans le compte.

Si l'intérêt est **composé annuellement**, la banque redonne $i\% \cdot A$ en intérêt au client après 12 mois. Le solde à la fin de l'année est

$$\underbrace{A}_{\text{solde initial}} + \underbrace{i\%A}_{\text{intérêt après } 1 \text{ an}} = A(1 + i\%).$$

Si l'intérêt est **composé deux fois par année**, la banque redonne $\frac{i\%}{2} \cdot A$ au client après la première tranche de 6 mois; le solde à cet instant est

$$\underbrace{A}_{\text{solde initial}} + \underbrace{\frac{i\%}{2}A}_{\text{intérêt après } 6 \text{ mois}} = A\left(1 + \frac{i\%}{2}\right).$$

La banque redonne ensuite $\frac{i\%}{2} \cdot A(1 + \frac{i\%}{2})$ au client après la seconde tranche de 6 mois; à la fin de l'année le solde est

$$\begin{aligned}
\underbrace{A\left(1 + \frac{i\%}{2}\right)}_{\text{solde après 6 mois}} + \underbrace{\frac{i\%}{2} \cdot A\left(1 + \frac{i\%}{2}\right)}_{\text{intérêt – } 2^{\text{e}} \text{ tranche de } 6 \text{ mois}} &= A\left(1 + \frac{i\%}{2} + \frac{i\%}{2}\left(1 + \frac{i\%}{2}\right)\right) \\
&= A\left(1 + i\% + \frac{i\%^2}{4}\right) = A\left(1 + \frac{i\%}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

En général, si l'intérêt est composé n fois par année, la banque redonne de l'intérêt après chaque tranche de $\frac{12}{n}$ mois, et le solde du compte à la fin de l'année est

$$A\left(1+\frac{i\%}{n}\right)^{n}.$$

La **valeur capitalisée** C d'un placement A dont l'intérêt est composé n fois par année pendant t années à un taux $i\%$ est donnée par

$$C = A\left(1+\frac{i\%}{n}\right)^{nt}.$$

Par opposition à C, la valeur A est appelleée la **valeur actualisée** (ou valeur présente).

Exemples:

1. Elowyn, Gwynneth, et Llewellyn reçoivent tous $1000\$$ en héritage.
   - Elowyn place son argent dans un compte où le taux d'intérêt est de 3%, composé 3 fois par année;
   - Gwynneth dans un compte où le taux d'intérêt est de 4%, composé annuellement, et
   - Llewellyn dans un compte où le taux d'intérêt est de 2%, composé quotidiennement (en supposant qu'une année comporte toujours 365 jours).

   Parmis les trois investisseurs, lequel ou laquelle à fait la meilleur affaire?

Solution: selon la formule précédente, la valeur des investissments après 5 ans est

$$\text{E:} \quad 1000\left(1+\frac{0.03}{3}\right)^{3(5)} = 1000(1+0.01)^{15} = 1000(1.01)^{15} \approx 1160.97\$$$

$$\text{G:} \quad 1000\left(1+\frac{0.04}{1}\right)^{1(5)} = 1000(1+0.04)^{5} = 1000(1.04)^{5} \approx 1216.65\$$$

$$\text{LI:} \quad 1000\left(1+\frac{0.02}{365}\right)^{365(5)} \approx 1000(1+0.0000547945)^{1825}$$

$$= 1000(1.0000547945)^{1825} \approx 1105.17\$$$

C'est donc Gwynneth qui fait la meilleure affaire.

2. Supposons que la valeur capitalisée C d'un placement A est $C = 3170.60\$$. En sachant que l'intérêt a été composé 4 fois par année à un taux de 8% pendant 3 ans, déterminer la valeur du placement initial A.

Solution: selon la formule,

$$A = \frac{C}{\left(1 + \frac{i\%}{n}\right)^{nt}} = \frac{3170.60}{\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4(3)}} \approx 2500.00\$.$$

Le placement initial A est la valeur actualisée de C; c'est la somme qu'il faudrait déposer dans un compte avec un taux d'intérêt de 8%, composé 4 fois par année, afin d'obtenir une somme de $3170.60\$$ après 3 ans.

Les séries de dépôts

Supposons qu'une cliente fasse une série de dépôts, tous de valeur P, dans un compte dont l'intérêt est composé n fois par année à un taux de $i\%$.

Si chaque dépôt est effectué **immédiatement après** que l'intérêt soit composé, le solde C après le $k-$ième dépôt est donné par

$$C = \sum_{j=0}^{k-1} P\left(1+\frac{i\%}{n}\right)^j = \frac{P\left(1-\left(1+\frac{i\%}{n}\right)^k\right)}{1-\left(1+\frac{i\%}{n}\right)}$$

(Comparer avec le scénario initial).

Exemple: en 2004, Daniel Alfredsson, joueur vedette des Sénateurs d'Ottawa, a signé un contrat d'une valeur approximative de 5 millions de dollars par année, pour une durée de 5 ans; à la fin du contrat, il avait donc reçu 25 millions de dollars.

On suppose que l'équipe n'entendait payer Alfredsson qu'à la fin de son contrat.

Quelle somme P a-t-elle déposée annuellement dans un compte en banque où le taux d'intérêt est de 7%, composé annuellement, afin de pouvoir se permettre le contrat d'Alfredsson?

(Go Sens!)

Solution: nous utilisons la formule, avec $C = 25$ millions, $i\% = 0.07$, $n = 1$, et $k = 5$. Ainsi,

$$25 = \frac{P\left(1 - \left(1 + \frac{0.07}{1}\right)^5\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.07}{1}\right)} = \frac{P\left(1 - (1.07)^5\right)}{1 - (1.07)},$$

c'est-à-dire

$$P = 25\frac{-0.07}{1 - (1.07)^5} \approx 4.3473 \text{ millions;}$$

les Sénateurs n'auraient ainsi eu besoin que de $4.3473\$$ millions par année (ou $21.7363\$$ millions en tout) afin de pouvoir se permettre le contrat de 25 millions.

DEPOT	INITIAL	P	INTERET	FINAL
1	0	4.3473	0.3043	4.6516
2	4.6516	4.3473	0.6299	9.6288
3	9.6288	4.3473	0.9783	14.9544
4	14.9544	4.3473	1.3511	20.6527
5	20.6527	4.3473		**25**
	TOTAL	21.7363		