MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 4
Les fonctions et les limites

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Aperçu

4.1 – La notion de fonction

Une **fonction** est une règle expliquant la dépendance d'une quantité sur une ou plusieurs autres quantités.

Une fonction consiste en trois objet:

- son **ensemble de départ**;
- son **ensemble d'arrivée**, et
- la **règle** reliant ces deux ensembles.

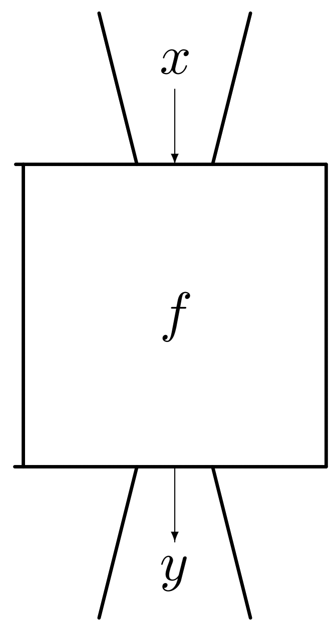
On visualise une fonction comme une boîte qui transforme des éléments de l'ensemble d'arrivée, avec une fente d'entrée et une fente de sortie:

- le **domaine de la fonction** est l'ensemble de toutes les choses qu'il est possible de transformer avec la boîte;
- l'**image de la fonction** est l'ensemble de tous les résultats possibles, et
- la règle est le méchanisme de transformation à l'intérieur de la boîte.

La boîte être complètement **déterministe**: si le même élément du domaine passe par la boîte plus d'une fois, le résultat sera identifique.

On utilise la notation $f : A \to B$ pour indiquer que le **nom de la fonction** est f, que son domaine $D_f \subseteq A$ et que son image $I_f \subseteq B$.

S'il est possible de spécifier la règle qui relie le domaine et l'image de la fonction, nous écrivons $y = f(x)$, où $y \in I_f$ et $x \in D_f$.



Exemple:

1. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ de tous les énoncés dont il est possible de déterminer la véracité à l'heure actuelle. Soit $f : \mathcal{P} \to \{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$ la fonction déterminant la véracité d'un énoncé.

   Ainsi, $D_f = \mathcal{P}$ et $I_f = \{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$. Par exemple,

   $$f(\text{les Sénateurs d'Ottawa jouaient au centre Corel en 2002}) = \mathsf{V},$$
   $$f(\text{un être humain peut survivre dans le vide}) = \mathsf{F}.$$

   Est-ce que $f(\text{il y a de la vie ailleurs dans le cosmos})$ est bien défini?

2. Considérons la fonction $g : E \to V$ où

   - E représente l'ensemble des gens qui suivent le cours,
   - V l'ensemble des villes et villages de la planète, et
   - g la règle qui assigne à chaque personne l'endroit où elle est née.

   Par exemple, $g(\text{Patrick Boily}) = \text{Matane}$ et

   $$g(\text{une étudiante acadienne du cours}) = \text{un village acadien.}$$

   Mais $g(\text{Jimmy Carter})$ et $g(\text{Ginger Spice})$ ne sont pas définis puisque ces individus n'appartiennent pas au domaine de la fonction (même s'ils sont quand même nés quelque part).

   Il faut en plus qu'aucun extra-terrestre ne suive le cours, sinon la fonction n'est pas bien définie.

De plus, $D_f = E$ et

$$I_f = \{\text{lieu de naissance des personnes qui suivent le cours}\} \neq V,$$

puisqu'il y a beaucoup plus de lieux de naissance sur la planète que d'individus dans la cours.

3. Considérons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par la règle $f(n) = \frac{1}{n}$.

   C'est une fonction puisque $f(n)$ ne prend qu'une valeur pour un n quelconque. De plus, $D_f = \mathbb{N}^{\times} \neq \mathbb{N}$ et $I_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \neq \mathbb{R}$.

4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = x^2$. Alors $D_h = \mathbb{R}$ et $I_h = [0, \infty[$ puisque $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in D_h$.

Remarque: les fonctions intéressantes en calcul différentiel et intégral sont les fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$.

À moins d'avis contraire, lorsque nous écrivons

soit la fonction définie par $f(x) = \cdots,$

cela veut dire

soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \cdots.$

Les graphiques des fonctions familières

Un graphique présente l'information pertinente de la relation entre x et y, mais il ne faut pas confondre le **graphique** $y = f(x)$ avec la **fonction** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

Par exemple, si une droite verticale quelconque intersecte la courbe en plus d'un endroit, cette dernière n'est alors pas représentative d'une fonction.

Le graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la courbe $y = f(x)$ dans le plan formé par l'axe des x et l'axe des y.

L'ensemble Z_f des **zéros** de f contient toutes les valeurs de x où la courbe croise l'axe des x; l'**ordonnée à l'origine** O_f de f contient la valeur y où la courbe croise l'axe des y. On peut avoir $Z_f = \varnothing$ ou $O_f = \varnothing$.

La fonction **constante** est définie par $f(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $Z_f = \varnothing$ si $k \neq 0$, $Z_f = \mathbb{R}$ si $k = 0$, $O_f = \{k\}$, $D_f = \mathbb{R}$, et $I_f = \{k\}$.

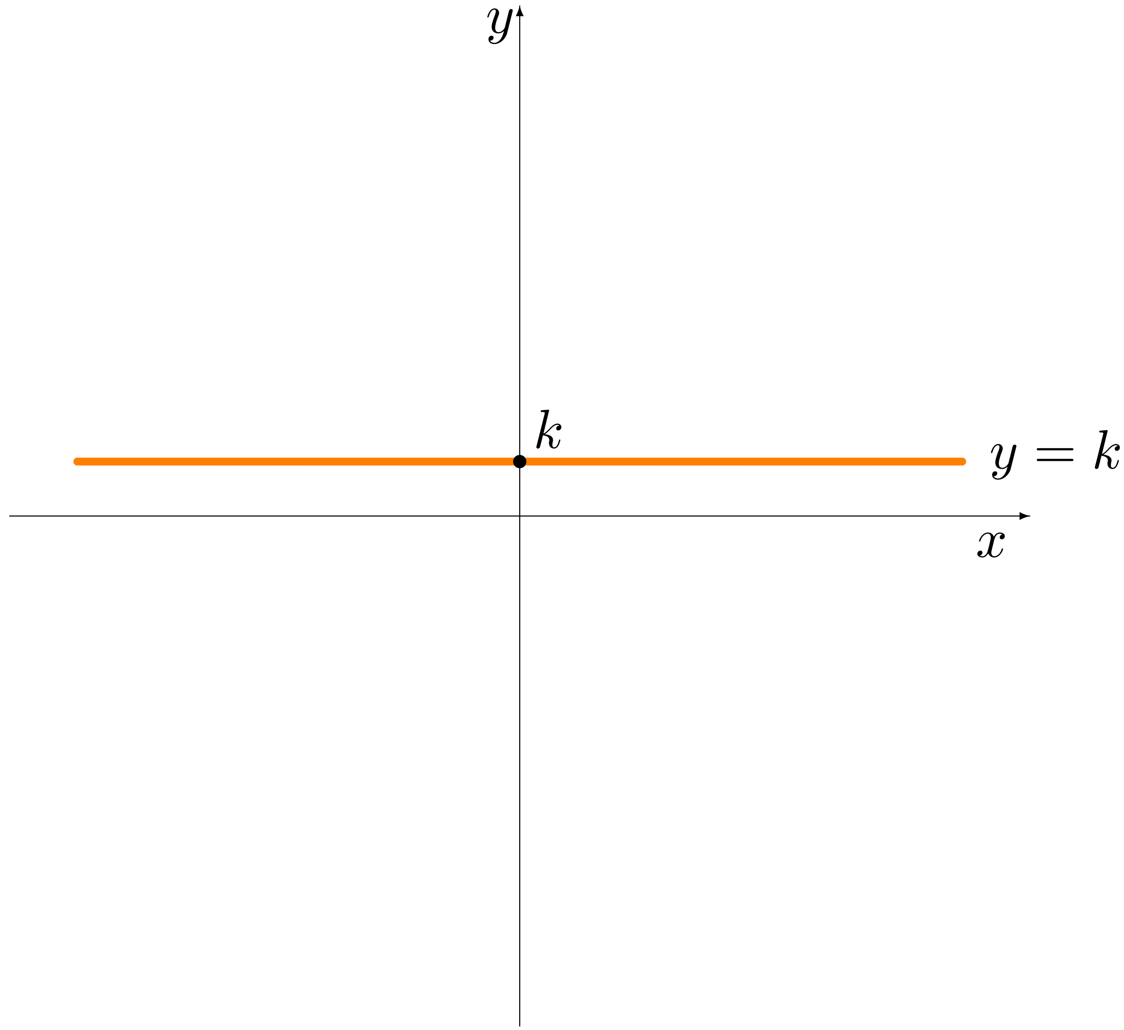
Exemples:

1. Un groupe de musique vend des billets au prix de $3\$$ par personne. La fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ qui représente le coût d'un billet en fonction de l'age de l'acheteur est constante: $f(x) = 3$ pour tout age $x > 0$.

2. La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1799827 & \text{si } x \neq -162553 \\ 1799827.1 & \text{si } x = -162553 \end{cases}$$

n'est pas constante puisque son image contient deux nombres.


y
k
$y = k$
x

Les fonctions **affines** (communément appellées fonctions linéaires) prennent la forme $f(x) = mx + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $Z_f = \left\{-\frac{b}{m}\right\}$, $O_f = \{b\}$, $D_f = \mathbb{R}$, et $I_f = \mathbb{R}$ si $m \neq 0$ ou $I_f = \{b\}$ autrement.

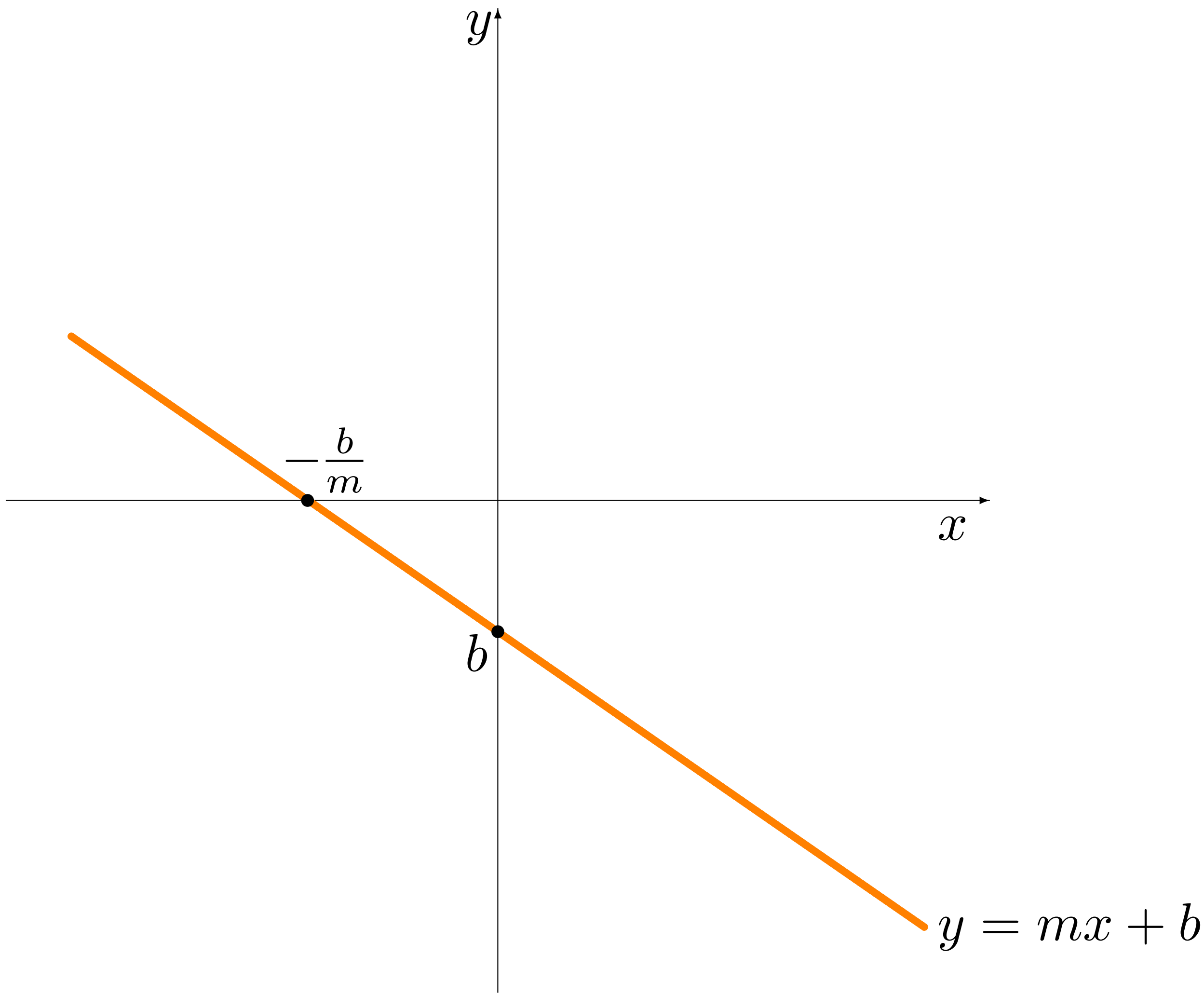
Exemple:

1. Une compagnie peut vendre 405 bicyclettes à $350\$$ l'unité mais seulement 225 bicyclettes à $600\$$ l'unité. Si le nombre de bicyclettes vendues q est une fonction affine du prix de vente unitaire p, déterminer son équation.

   Solution: par hypothèse, $q = mp + b$, et il faut déterminer m et b. Mais

   $$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{225 - 405}{600 - 350} = -\frac{18}{25} \Longrightarrow q = -\frac{18}{25}p + b.$$

   De plus, $225 = -18/25(600) + b$, d'où $b = 657$.


y
$-\frac{b}{m}$
x
b
$y = mx + b$

2. Le **point mort** d'une compagnie est le nombres d'articles à produire afin d'obtenir un profit nul, c'est-à-dire le nombre d'articles à produire pour que les coûts de production et les revenus de vente soient égaux. Si le coût de production de x milliers d'articles est $C(x) = 250x + 700$ et le revenu de la vente de x milliers d'articles est $R(x) = 300x$, déterminer la fonction profit et trouver son point mort.

   Solution: puisque $P(x) = R(x) - C(x)$, nous obtenons

$$P(x) = 300x - (250x + 700) = 50x - 700.$$

   Le point mort est la racine de la fonction affine P, c'est-à-dire

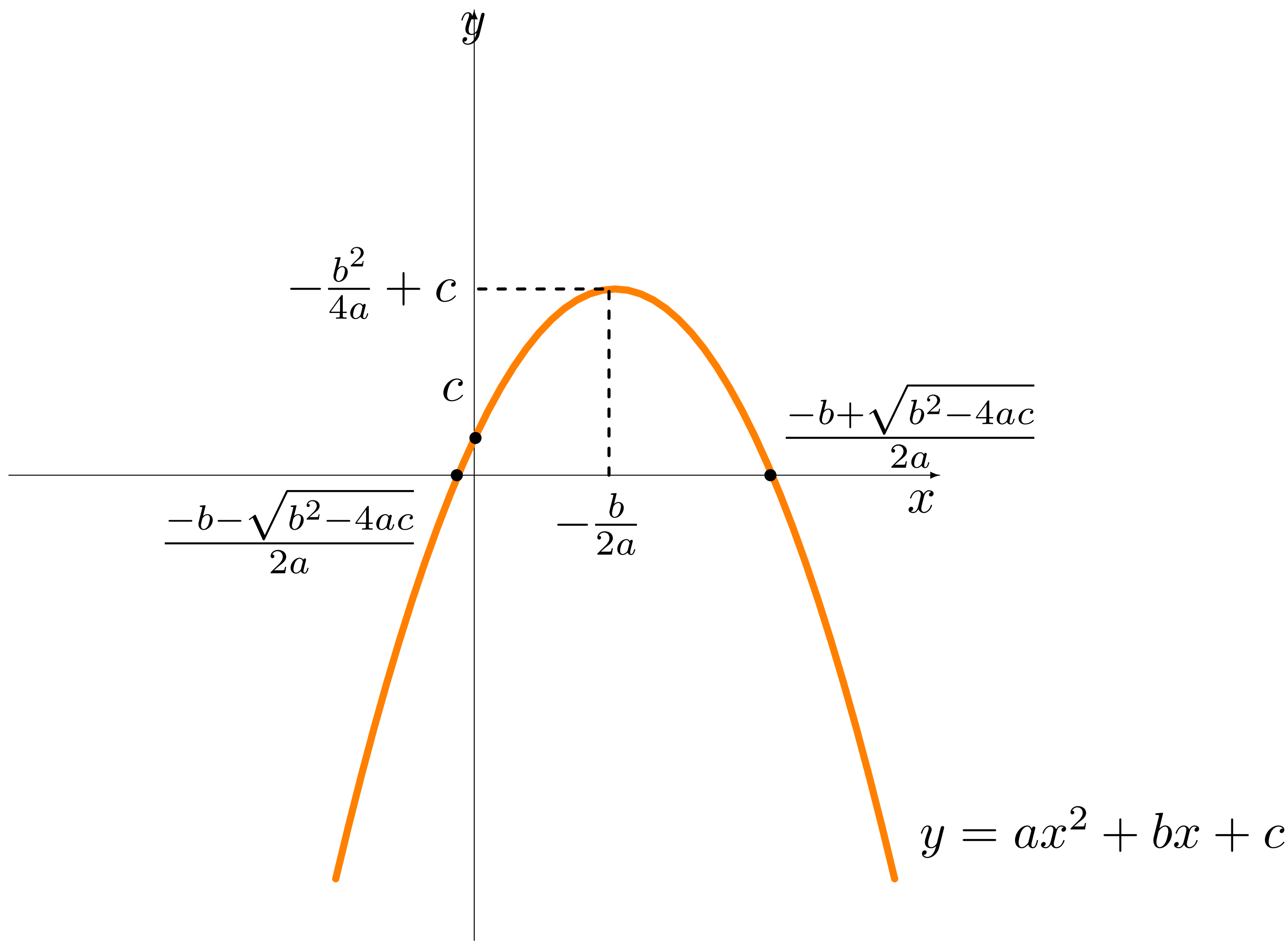
$$x = -\frac{b}{m} = -\frac{-700}{50} = 14 \Longrightarrow \text{point mort: } x > 14.$$

Les fonctions **quadratiques** prennent la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ (sinon la fonction est affine). Alors

$$Z_f = \begin{cases} \left\{ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\} & \text{si } b^2 - 4ac > 0 \\ \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} & \text{si } b^2 - 4ac = 0 \\ \varnothing & \text{si } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

$O_f = \{c\}$, $D_f = \mathbb{R}$, et

$$I_f = \begin{cases} \left[-\frac{b^2}{4a} + c, \infty \right[& \text{si } a > 0 \\ \left] -\infty, -\frac{b^2}{4a} + c \right] & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



y
$-\frac{b^2}{4a} + c$
c
$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$-\frac{b}{2a}$
x
$y = ax^2 + bx + c$

Exemple: la propriétaire d'une tour à appartements loue (en moyenne) chacun de ses 150 appartements pour la somme de $605\$$. Elle sait que si elle augmente le loyer par tranche de $30\$$, elle perd en moyenne 2 locataires. Que devrait être le loyer moyen d'un de ces appartments si elle désire faire des revenus mensuels de $100,000\$$?

Solution: supposons qu'elle décide d'augmenter le loyer de x tranches de $30\$$: le loyer mensuel devient $605 + 30x$.

Mais elle perd 2 locataires pour chacun de ces x tranches; elle a donc $150 - 2x$ locataires.

Ses revenus mensuels sont donc

$$(605 + 30x)(150 - 2x) = -60x^2 + 3290x + 90750.$$

Afin d'effectuer des revenus mensuels de $100,000\$$, elle doit donc résoudre l'équation

$$-60x^2 + 3290x + 90750 = 100000 \Longrightarrow -60x^2 + 3290x - 9250 = 0.$$

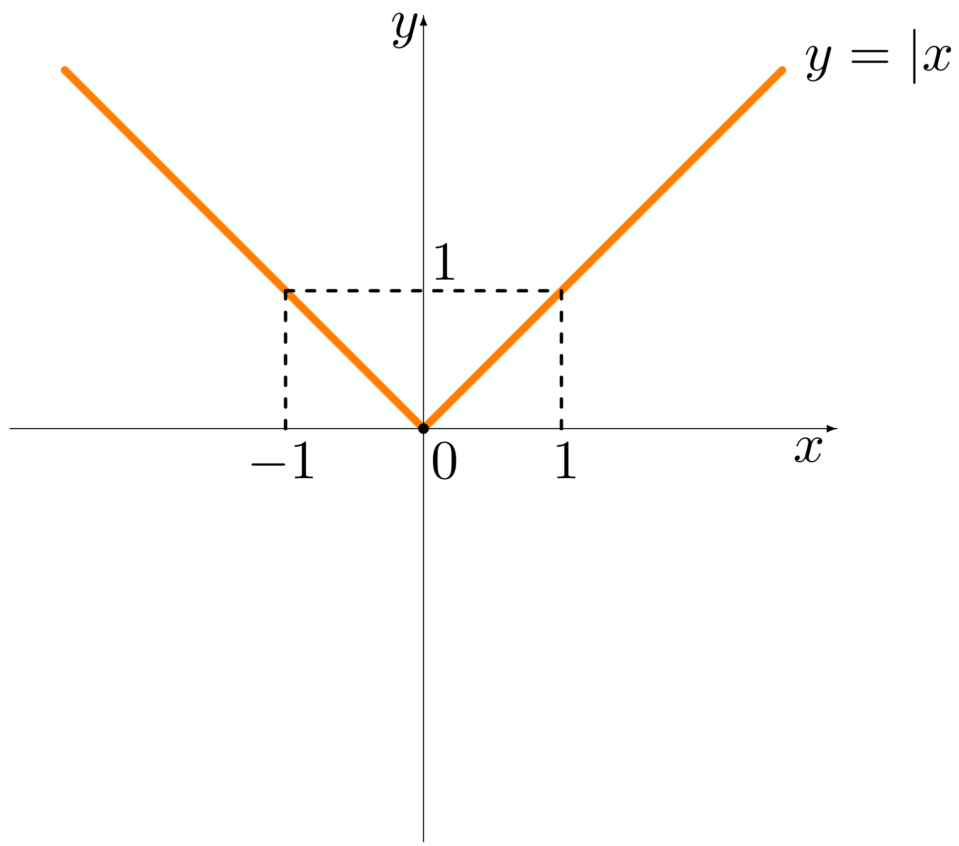
Puisque $b^2 - 4ac = 3290^2 - 4(-9250)(-60) = 8604100 > 0$, l'équation possède deux racines, obtenues à l'aide de la formule quadratique:

$$x = \frac{329 - \sqrt{86041}}{12} \approx 2.97 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{329 + \sqrt{86041}}{12} \approx 51.86,$$

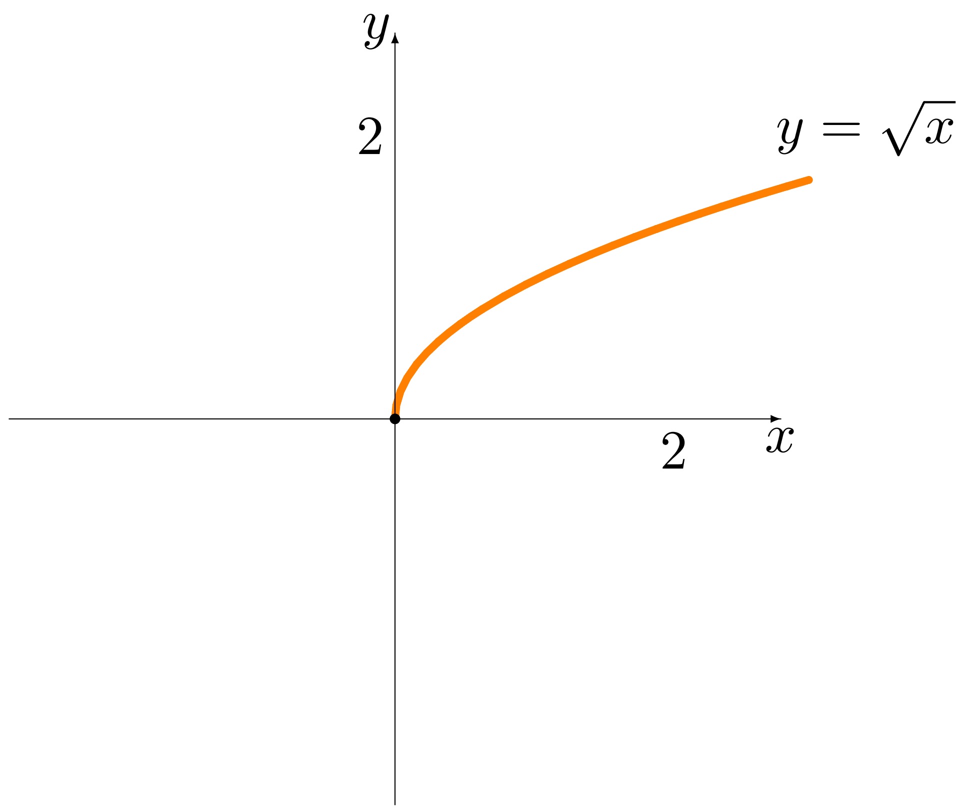
c'est-à-dire que les augmentations devraient être de $2.97(30) = 89.10\$$ ou $51.86(30) = 1555.80\$$, pour un total approximatif de $695\$$ ou $2165\$$. Dans le premier cas, elle aura ≈ 144 locataires; dans le second, ≈ 46.

⚠ Mathématiquement, il y a 2 solutions; mais en pratique...

La fonction **valeur absolue** prend la forme $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $Z_f = \{0\}$, $O_f = \{0\}$, $D_f = \mathbb{R}$, $I_f = [0, \infty[$.



La fonction **racine carrée** prend la forme $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $Z_f = \{0\}$, $O_f = \{0\}$, $D_f = [0, \infty[$, $I_f = [0, \infty[$.



Les familles de fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les fonctions apparentées

$$g(x) = Af(B(x - C)) + D$$

s'obtiennent à partir de f en effectuant les transformations suivantes:

- **étirement vertical** à partir de l'axe des x selon un facteur de A (précédé d'une réflexion selon l'axe des x si $A < 0$);
- **étirement horizontal** à partir de l'axe des y selon un facteur de $\frac{1}{B}$ (précédé d'une réflexion selon l'axe des y si $B < 0$);

- **translation horizontale** de C (à droite si $C > 0$, à gauche si $C < 0$);
- **translation verticale** de D (en haut si $D > 0$, en bas si $D < 0$).

⚠ **Il faut effectuer les étirements AVANT les translations.**

Exemples: tracer les graphiques des fonctions suivantes:

1. $y = 3|x+2| - 4$;
2. $y = \sqrt{2x-2} + 1$;
3. $y = -2x^2 + 3x + 1$;

Solution:

1. Ré-écrivons $3|x+2|-4 = 3|x-(-2)|+(-4)$. Si $f(x)=|x|$, alors

$$y = 3f(x-(-2))+(-4);$$

d'où

$$A=3, \quad B=1, \quad C=-2, \quad D=-4.$$

Le graphique recherché est obtenu à partir de $f(x)=|x|$ en effectuant:

- un étirement vertical de facteur $A=3$;
- une translation horizontale de $C=-2$ (2 vers la gauche), et
- une translation verticale de $D=-4$ (4 vers le bas).

2. Ré-écrivons $\sqrt{2x-2}+1=\sqrt{2(x-1)}+1$. Si $f(x)=\sqrt{x}$, alors

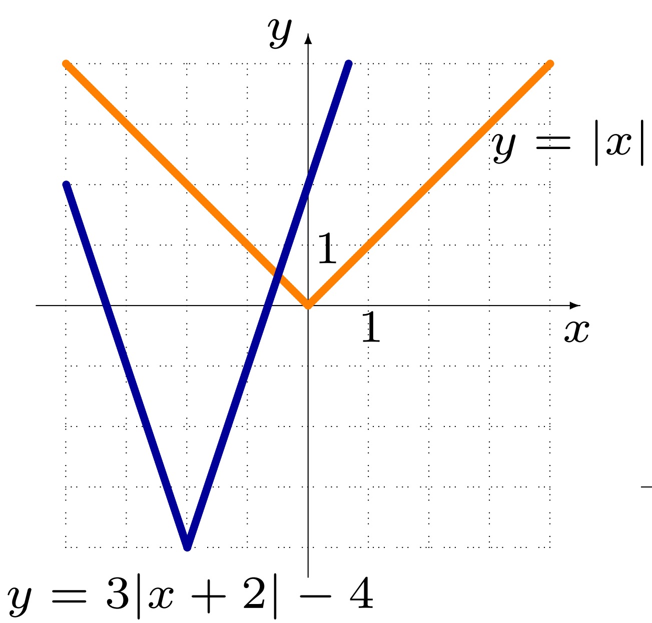
$$y=f(2(x-1))+1 \Longrightarrow A=1,\ B=2,\ C=1,\ D=1.$$

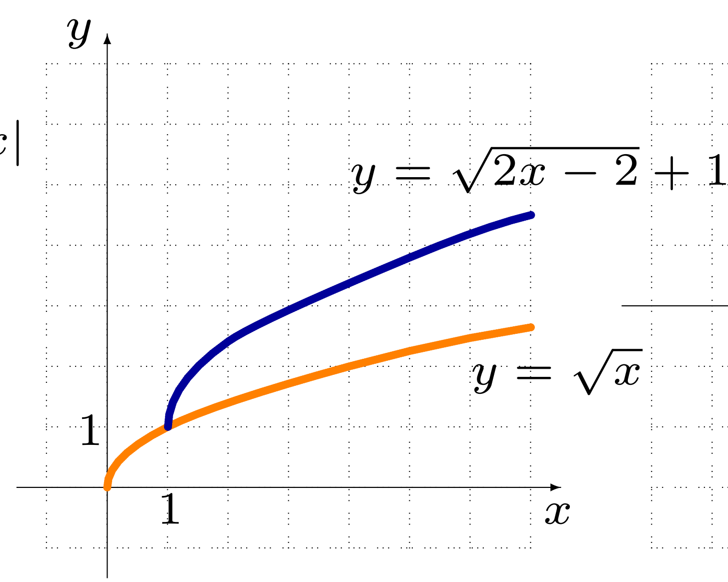
Le graphique recherché est obtenu à partir de $f(x)=\sqrt{x}$ en effectuant un étirement horizontal de facteur $\frac{1}{B}=\frac{1}{2}$, une translation horizontale de $C=1$ (vers la drote), et une translation verticale de $D=1$ (vers le haut).

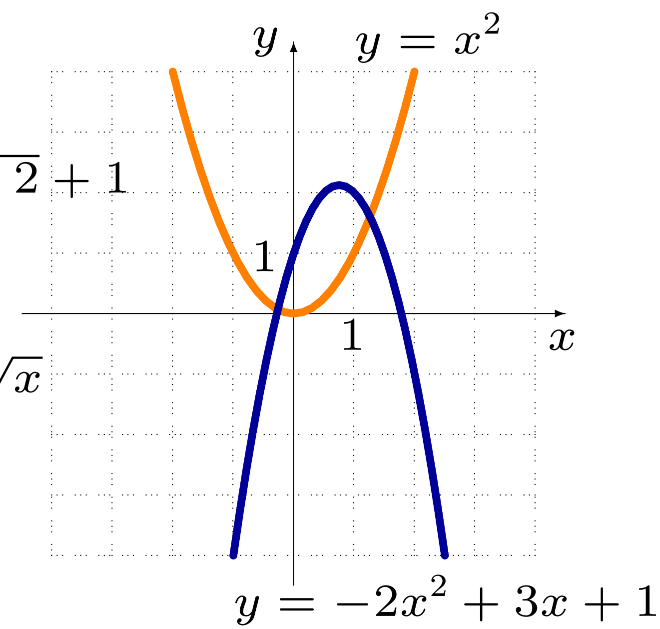
3. Ré-écrivons $-2x^2+3x+1=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$. Si $f(x)=x^2$, alors

$$y=-2f\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{17}{8} \Longrightarrow A=-2,\ B=1,\ C=\frac{3}{4},\ D=\frac{17}{8}.$$

Le graphique recherché est obtenu à partir de $f(x)=x^2$ en effectuant une réflexion par rapport à l'axe des x ($A<0$), puis en effectuant un étirement vertical de facteur 2 ($|A| = 2$), une translation horizontale de $C = \frac{3}{4}$, et une translation verticale de $D = \frac{17}{8}$.



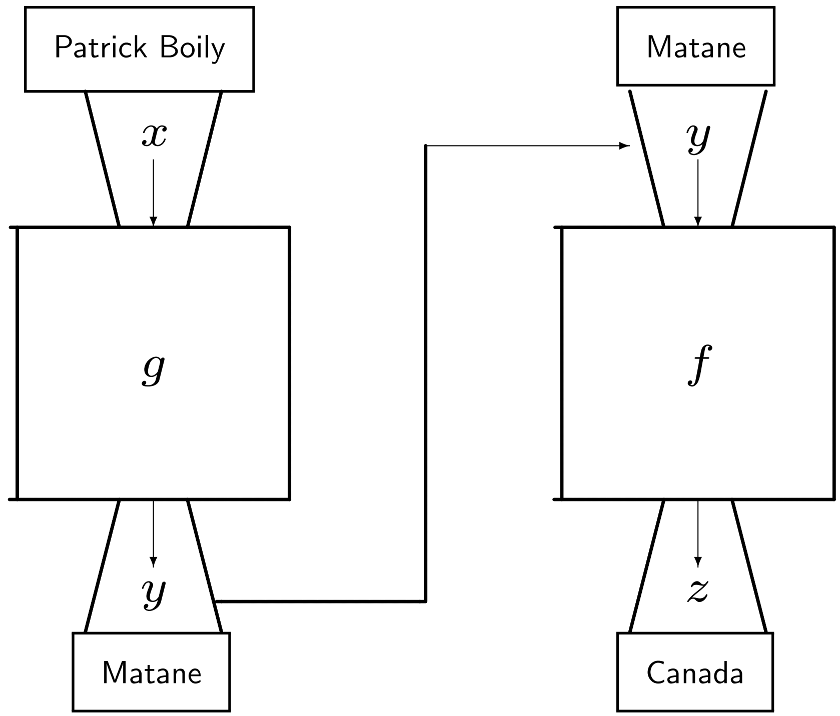




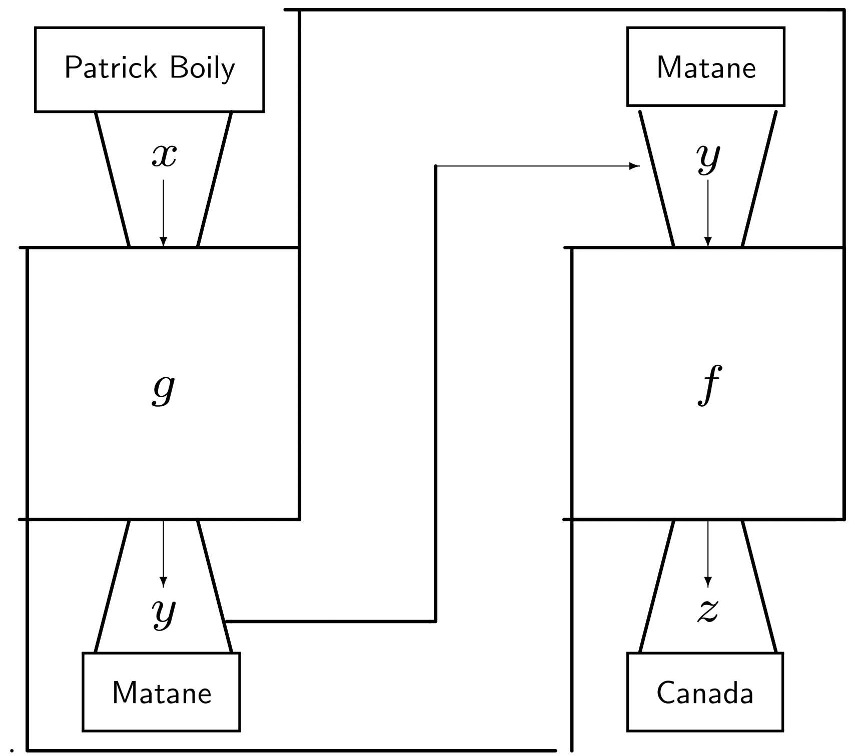
La composition de fonctions

Soit P l'ensemble de tous les pays de la planète. Considérons la fonction $g : E \to V$ de l'exemple à la p.7 et la fonction $f : V \to P$ qui assigne à chaque ville le pays dans lequel elle se situe.

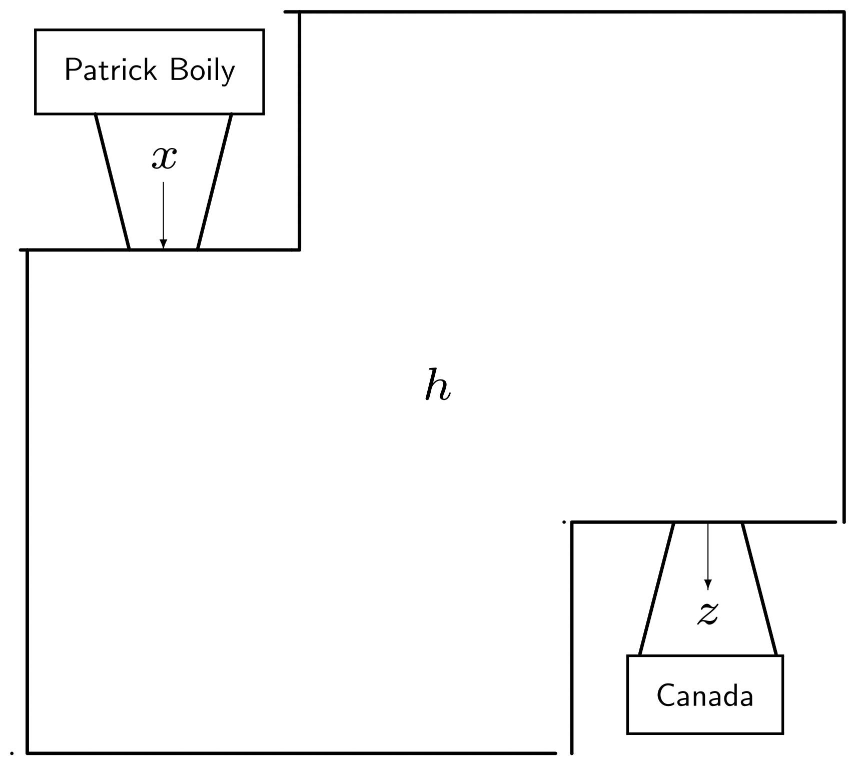
On détermine le pays dans lequel une personne suivant le cours est née à l'aide du cheminement suivant.


Patrick Boily
x
g
y
Matane
Matane
y
f
z
Canada

L'étape intermédiaire (la ville, ou y) pourrait être cachée, sans pour autant changer le résultat (le pays, ou z).



En fin de compte, nous nous retrouvons avec une fonction $h : E \to P$, définie par la boîte:



Elle effectue exactement la même transformation que la succession des fonctions g et f, c'est-à-dire que

$$h(\text{Patrick Boily}) = \text{Canada}$$
$$f(g(\text{Patrick Boily})) = f(\text{Matane}) = \text{Canada}.$$

La **composition** de $g : A \to B$ et $f : B \to C$ est la fonction $h : A \to C$ obtenue en omettant les valeurs intermédiaires. Elle est dénotée par $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Il faut noter que cette définition n'a un sens que lorsque $I_g \subseteq D_f$:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C.$$

⚠ Dans ce qui précède, la composition $f \circ g : E \to P$ est bien définie, et elle assigne à chaque personne suivant le cours le pays où elle est née (à l'époque de sa naissance).

Mais la composition $g \circ f$ n'est pas définie. En effet, I_f est un ensemble de pays et D_g est un ensemble de personnes. Aucun pays n'est une personne, et l'inclusion $I_f \subseteq D_g$ n'est pas satisfaite.

La fonction f ne s'applique qu'à des villes et la fonction g qu'à des personnes:

$$(g \circ f)(\text{Matane}) = g(f(\text{Matane})) = g(\text{Canada}) = ?$$

En général, $f \circ g \neq g \circ f$**.**

Exemple: soient $g(x) = 17x + x^2$ et $f(x) = 3x^2 + 2$. Soient $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$. Calculer:

1. $k(2)$;
2. $h(-2)$;
3. $h(x) + k(x)$;
4. $h(g(2))$;
5. $k(y)$;
6. $h(z)$.

L'inverse d'une fonction

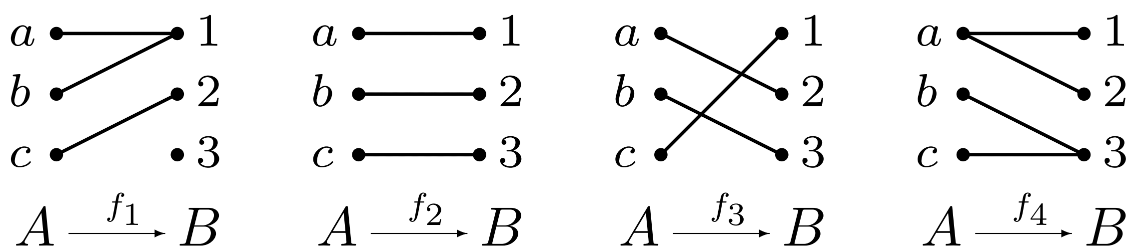
Une fonction $f : A \to B$ est

- **injective** si elle envoie toute paire d'éléments distincts de A sur une paire d'éléments distincts de B;
- **surjective** s'il est possible d'atteindre tous les éléments de B à partir des éléments de A,
- **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle est injective si toute droite horizontale ne coupe la courbe $y = f(x)$ en (au plus) un seul point, elle est sujective si toutes les hauteurs sont atteintes.

Exemples:

1. Soient $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles, et considérons les relations $f_1, f_2, f_3, f_4 : A \to B$ représentées par les graphiques suivants:



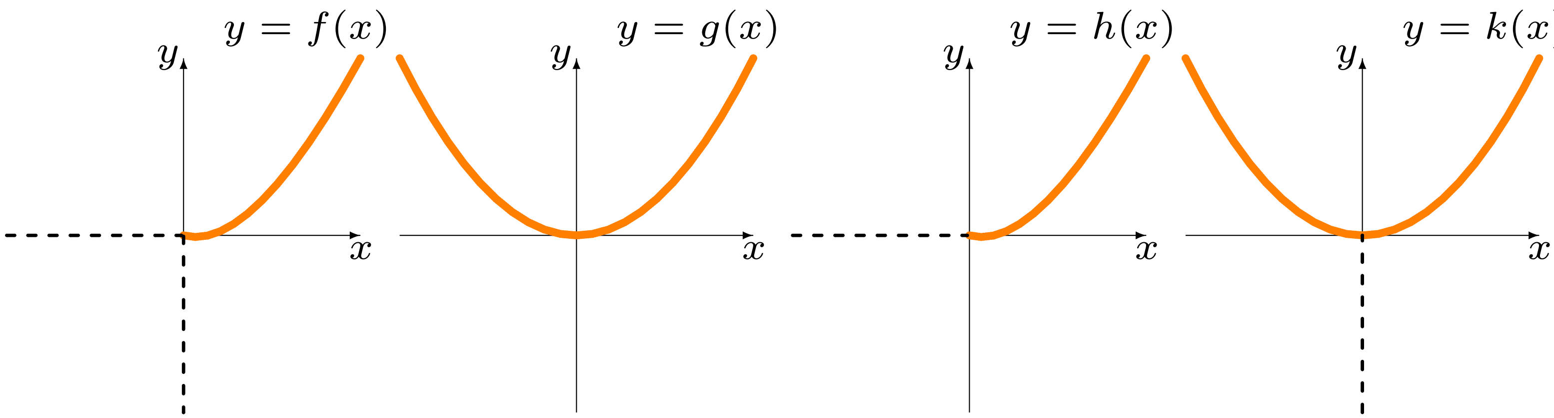
Alors

- f_2 et f_3 sont bijectives;
- f_1 n'est ni injective ni surjective, et
- f_4 n'est pas une fonction.

2. Considérons 4 fonctions qui ont toutes la même règle (prendre le carré), mais avec des ensembles de départ et d'arrivées différents:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ h : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ \ k : \mathbb{R} \to [0, \infty[,\ \ f : [0, \infty[\to [0, \infty[.$$

Alors f est bijective, h est injective mais non surjective, k est surjective mais non injective et g n'est ni injective ni surjective.



Si $f : A \to B$ est injective, la réflexion de son graphique par rapport à la droite $y = x$ est aussi le graphique d'une fonction: celui de la **fonction réciproque** $f^{-1} : B \to A$ (ou fonction inverse).

On détermine l'expression pour $f^{-1}(x)$ en interchangeant $y \leftrightsquigarrow x$ dans l'expression $y = f(x)$ (réflexion par rapport à $y = x$) et en isolant y.

Exemple: trouver une expression pour f^{-1} dans les cas suivants.

1. $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, où $f(x) = x^2$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 3x + 4$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = x^5 + x$.

Solution:

1. Puisque $f(x) = x^2$ est injective sur $[0, \infty[$, la réflexion par rapport à $y = x$ est aussi une fonction $\Rightarrow$ la fonction $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ existe :

$$y = f(x) = x^2 \overset{x \leftrightsquigarrow y}{\leftrightsquigarrow} x = f(y) = y^2 \Longrightarrow y = \sqrt{x} = f^{-1}(x).$$

2. Puisque $f(x) = 3x + 4$ est bijective, elle est aussi injective et la fonction $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe:

$$y = f(x) = 3x + 4 \overset{x \leftrightsquigarrow y}{\leftrightsquigarrow} x = f(y) = 3y + 4 \Longrightarrow y = \frac{x - 4}{3} = f^{-1}(x).$$

3. Il n'est pas évident que $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$ est injective.

   Supposons pour l'instant qu'elle le soit et que la fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) = \frac{4x-2}{3x+1} \overset{x \leftrightsquigarrow y}{\leftrightsquigarrow} x = f(y) = \frac{4y-2}{3y+1} &\Longrightarrow (3y+1)x = (4y-2) \\
&\Longrightarrow 3xy - 4y = -2 - x \\
&\Longrightarrow (3x-4)y = -(x+2) \\
&\Longrightarrow y = -\frac{x+2}{3x-4} = f^{-1}(x).
\end{aligned}
$$

   Puisque nous avons trouvé f^{-1}, c'est donc que f était inversible.

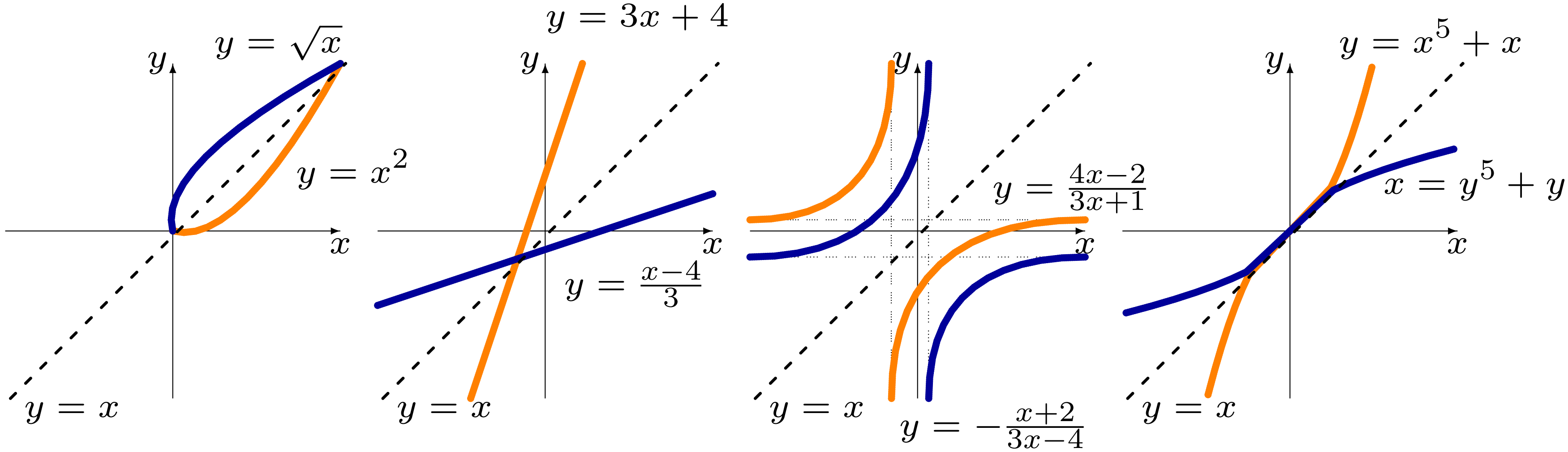
4. Cette fonction est injective, mais nous ne pouvons pas le montrer sans difficulté à l'heure actuelle (plus tard, nous verrons que c'est parce que sa dérivée $f'(x) = 5x^4 + 1$ est toujours strictement supérieure à 0).

   On sait donc que la fonction réciproque f^{-1} existe. Cependant, il n'est pas possible d'exprimer la réciproque inverse de façon explicite:

$$y = f(x) = x^5 + x \overset{x \leftrightsquigarrow y}{\leftrightsquigarrow} x = f(y) = y^5 + y \Longrightarrow y = f^{-1}(x) = ???.$$

   Mais il est tout de même possible de tracer la courbe correspondant à la fonction inverse en effectuant une réflexion à travers la droite $y = x$.

Discussion: Soit f une fonction inversible. Quelle est la fonction inverse de f^{-1}? Que pouvez-vous dire de $f \circ f^{-1}$?



Le graphique de la fonction originale est tracé en **orange**, celui de la réciproque en **bleu**.

4.2 – Le concept de la limite

Au deuxième chapitre, nous avons calculé la pente de la tangente à l'hyperbole $y = 1/x$ en $P(\frac{1}{2}, 2)$ à l'aide de l'équation

$$\lim_{h \to 0} \frac{-2}{\frac{1}{2} + h} = -4.$$

Le temps est venu d'élucider ce qu'on entend par la **limite** d'une fonction.

Nous allons considérer trois approches informelles différentes, que nous illustrons à l'aide de $f(x) = 2x - 4$. Quel est le comportement de cette fonction lorsque x s'approche de 3, sans l'atteindre exactement ($x \neq 3$):

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x - 4) = ?$$

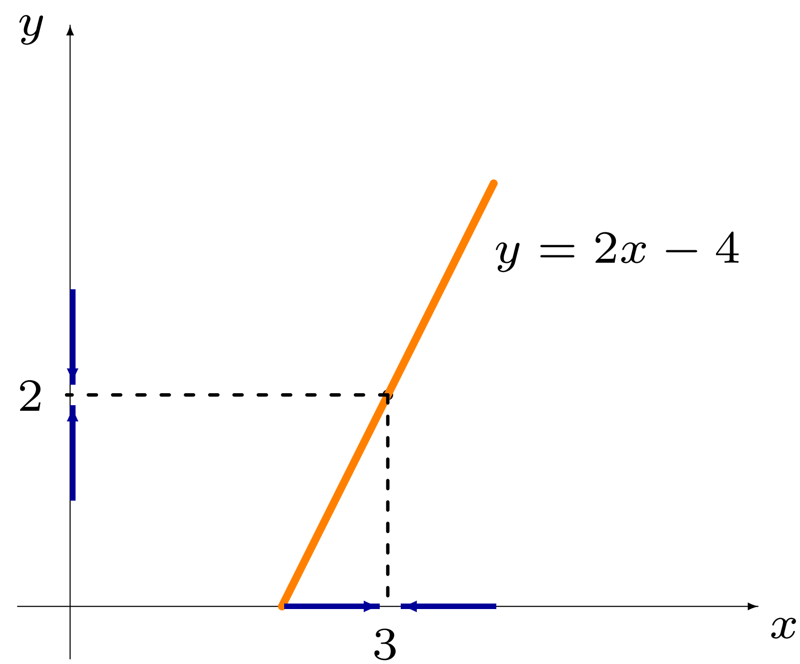
Tableau: on prend des valeurs de x se rapprochant de 3, et on tente de déceler un patron: les valeurs de $f(x)$ semblent se rapprocher de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2	0	4	4
2.9	1.8	3.1	2.2
2.99	1.98	3.01	2.02
2.999	1.998	3.001	2.002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
3	2	3	2

On ne peut pas nécessairement en conclure que $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.

Nous n'avons étudié que deux suites de nombres dont la valeur s'approche de 3 et il faut que le résultat tienne pour **toutes ces suites**.

Graphique: puisque nous “connaissons” la courbe $y = f(x) = 2x - 4$, vérifions ce qui se passe lorsque x se rapproche de 3.



La hauteur de $f(x)$ semble bien s'approcher de 2. Cette approche ne fonctionne que lorsque le graphique de la fonction est bien connu.

Continuité: si $x \to 3$, il semble vraisemblable que $2x \to 2(3) = 6$ d'où

$$\lim_{x \to 3} (2x - 4) = \lim_{x \to 3} (2x) - 4 \to 6 - 4 = 2.$$

Est-il nécéssairement vrai que $2x \to 2(3)$ lorsque $x \to 3$?

Dans les trois cas, les valeurs de $f(x)$ semblent se rapprocher de 2 lorsque x se rapproche de 3. Lorsque c'est le cas, nous écrivons

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2.$$

⚠ **Nous n'avons pas réellement défini le concept de limite, ni démontré le résultat recherché.**

Lors de l'exmple précédent, la valeur de la fonction en $x = 3$ est

$$f(3) = 2(3) - 4 = 2,$$

d'où $f(x) \to f(3)$ lorsque $x \to 3$ ou

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3).$$

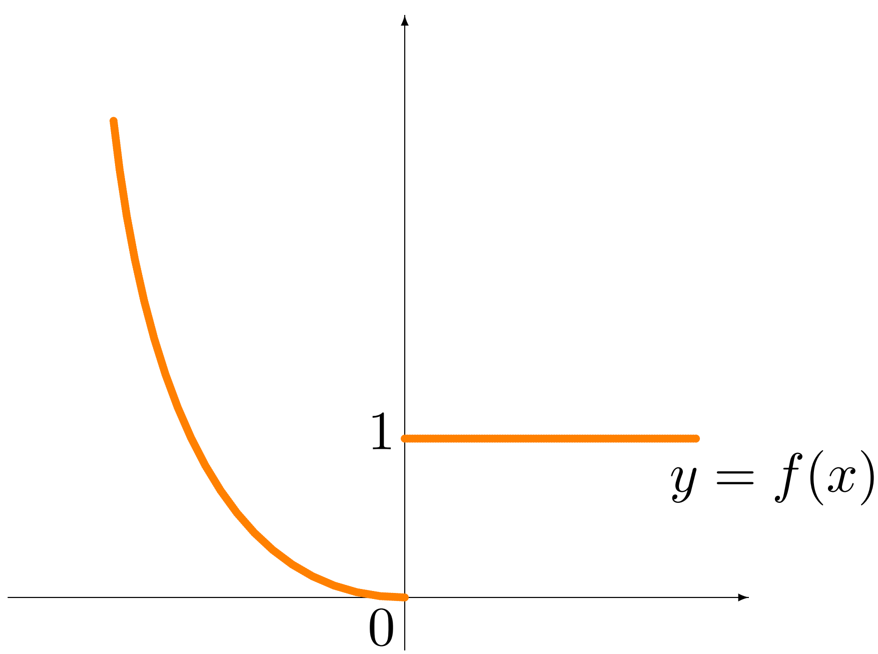
Le graphe de cette fonction est continu lorsque $x = 3$ puisque il traverse le point $(3, f(3)) = (3, 2)$ sans atteindre de **discontinuité** (de trou).

Il aurait été plus simple de calculer $f(3)$ afin de trouver la limite recherchée! Le calcul de la limite d'une fonction continue est donc très simple.

Mais les fonctions ne sont pas toutes continues...

La limite à droite et la limite à gauche

Considérons la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.



La valeur limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ dépend de la direction par laquelle nous nous rapprochons de 0:

- si $x > 0$ et $x \to 0$, alors $f(x) \to 1$ et la **limite de** $f(x)$ **lorsque** x **tend vers** 0 **de la droite** est 1, dénoté par

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1;$$

- si $x < 0$ et $x \to 0$, alors $f(x) \to 0$ et la **limite de** $f(x)$ **lorsque** x **tend vers** 0 **de la gauche** est 0, dénoté par

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Les limites à droite et à gauche de $f(x)$ en $x = 0$ sont différentes; $f(x)$ ne tend pas vers une valeur unique lorsque $x \to 0$.

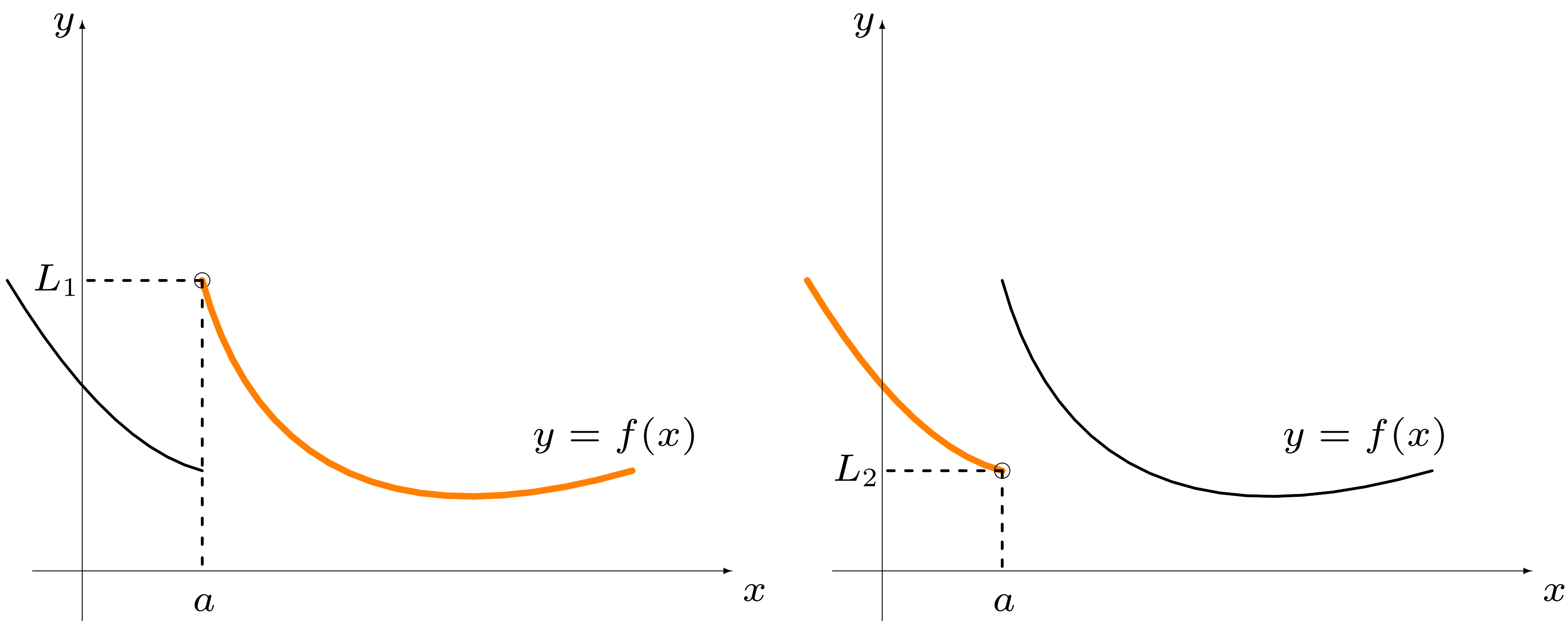
Dans ce cas, la **limite de** $f(x)$ **lorsque** $x \to 0$ **n'existe pas**. Puisque les limites à droite et à gauche en $x = 0$ sont différentes, la fonction possède une **discontinuité** en $x = 0$.

Soient f une fonction quelconque et $a \in \mathbb{R}$ une valeur arbitraire. On calcule $\lim_{x \to a} f(x)$ à l'aide de

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L_2;$$

si $L_1 \neq L_2$, alors $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas; autrement

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L_1 = L_2.$$


y
L_1
$y = f(x)$
a
x
y
L_2
$y = f(x)$
a
x

Exemples:

1. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq -1 \\ x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

Est ce que $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe?

Solution: essayons de répondre à la question sans se référer au graphique de la fonction. Il faut calculer les limites à droite et à gauche lorsque $x = -1$ et vérifier si elles sont égales.

À droite: si $x \to -1^+$, alors $x > -1$, d'où $f(x) = x + 5$:

$$L_1 = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 5) = -1 + 5 = 4.$$

À gauche: si $x \to -1^-$, alors $x < -1$, d'où $f(x) = x^2 - 3x$:

$$L_2 = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 - 3x) = (-1)^2 - 3(-1) = 4.$$

Puisque $L_1 = L_2 = 4$, alors

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 4.$$

2. Considérons la même fonction f. Est ce que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe?

Solution: il faut cette fois calculer les limites à droite et à gauche lorsque $x = 2$ et vérifier si elles sont égales.

À droite: si $x \to 2^+$, alors $x > 2 > -1$, d'où $f(x) = x + 5$:

$$L_1 = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+5) = 2 + 5 = 7.$$

À gauche: si $x \to 2^-$ et $-1 < x < 2$ alors $f(x) = x + 5$:

$$L_2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+5) = 2 + 5 = 7.$$

Puisque $L_1 = L_2 = 7$, alors $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

3. Considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \leq -1 \\ x + 4, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

Est ce que $\lim_{x \to -1} g(x)$ existe?

Solution: il faut calculer les limites à droite et à gauche lorsque $x = -1$ et vérifier si elles sont égales.

À droite: si $x \to -1^+$, alors $x > -1$, d'où $g(x) = x + 4$:

$$L_1 = \lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 4) = -1 + 4 = 3.$$

À gauche: si $x \to -1^-$, alors $x < -1$, d'où $g(x) = x^2 - 3x$:

$$L_2 = \lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 - 3x) = (-1)^2 - 3(-1) = 4.$$

Puisque $L_1 = 3 \neq 4 = L_2$, alors $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ n'existe pas .

Dans cet exemple, nous avons utilisé, de façon intuitive, la **continuité** des fonctions définies par $x + 5$, $x + 4$ et $x^2 - 3x$ afin d'évaluer les limites.

C'est le sujet de la prochaine section.

Les fonctions continues

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $f(a)$ existe ET $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, la fonction f est **continue en** $x = a$. Autrement, f est **discontinue en** $x = a$.

Il y a trois possibilités:

1. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, la fonction f est continue en $x = a$;
2. si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, la limite lorsque $x \to a$ existe, mais f n'est pas continue en $x = a$, et
3. si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, la limite n'existe pas lorsque $x \to a$, donc la fonction n'est pas continue en $x = a$.

Si une fonction est continue en $x = a$ pour tout a dans son domaine, nous dirons simplement qu'elle est **continue**.

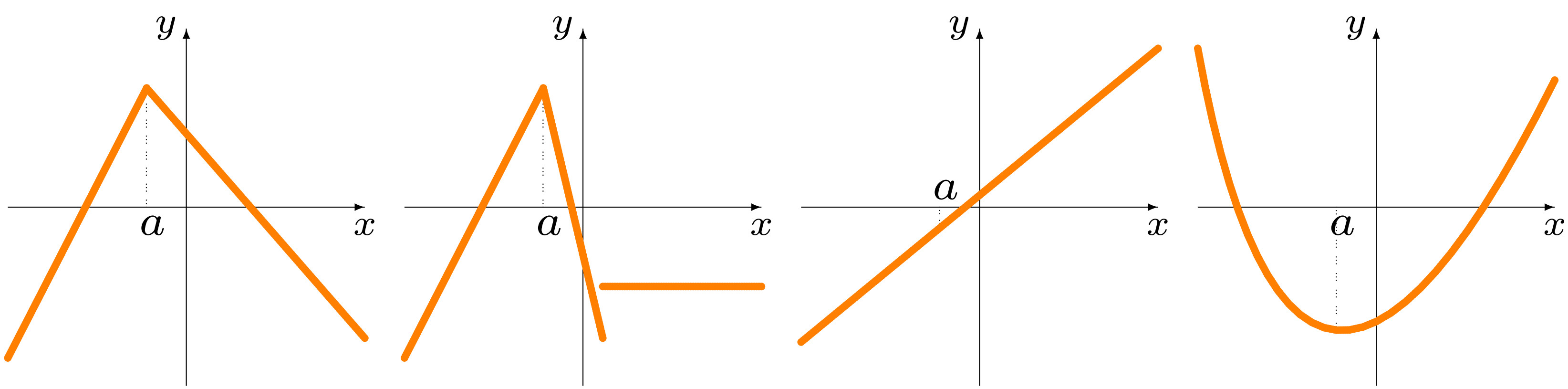
Il ne suffit pas que la fonction soit définie en un point ou que sa limite existe à cet endroit pour qu'elle y soit continue; **il faut en plus que ces deux quantités soient égales**.

De façon intuitive, une fonction est continue si une balle qui se promène sur le graphe de la fonction ne tombe jamais dans un trou, ou encore s'il est possible de tracer son graphique sans lever le crayon.

Il n'est pas toujours évident de tracer le graphique d'une fonction; certaines propriétés facilitent la tâche (on en reparlera).

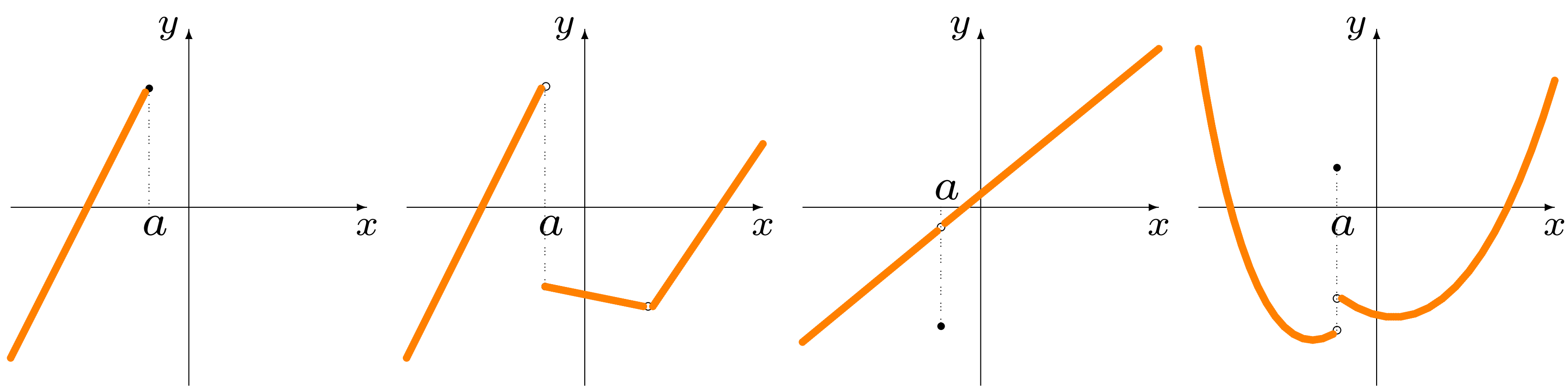
Exemples:

1. Les fonctions suivante sont continues en $x = a$.



2. Les fonctions présentées à la page suivante ne sont pas continues en $x = a$. Dans le troisième cas, la limite existe et f est définie en a, mais les deux valeurs ne sont pas égales; dans le second et le dernier cas, les

limites à gauche et à droite en a ne sont pas égales, tandis que dans le premier cas, la limite à droite en a n'existe pas, c'est donc dire que la limite n'existe pas.



⚠ Dans certains ouvrages, on considère que la première fonction est continue en $x = a$ puisque la limite à droite n'existe pas simplement car le domaine de la fonction exclut $x > a$.

Les propriétés des limites

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x^2 + 3x$.

Lorsque $x \to -1$, nous avons $5x^2 + 3x \to 5(-1)^2 + 3(-1) = 2$, d'où

$$\lim_{x \to -1} (5x^2 + 3x) = 2.$$

Cette fonction est la somme de deux fonctions: $g(x) = 5x^2$ et $h(x) = 3x$.

Lorsque $x \to -1$, $5x^2 \to 5(-1)^2 = 5$ et $3x \to 3(-1) = -3$, d'où

$$\lim_{x \to -1} 5x^2 = 5, \quad \lim_{x \to -1} 3x = -3, \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \to -1} (5x^2 + 3x) = \lim_{x \to -1} 5x^2 + \lim_{x \to -1} 3x = 5 - 3 = 2.$$

Théorème: soient f et g des fonctions, k une constante, et $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) + \left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$;

4. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, et

5. Si n est pair et $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Les limites se comportent bien par rapport aux opérations élémentaires.

Exemples: calculer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x \to a} x^n$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 7x^2 + x + 2)$.
3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x + 2}$;
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x + 2}$, $a^3 + a + 2 \neq 0$;
5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}}$;

Les fonctions algébriques

L'exemple précédent montre qu'on peut évaluer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$ en effectuant la substitution $x = a$ pour au moins trois types de fonctions:

- polynomiales;
- rationnelles, et
- algébriques.

Une **fonction polynomiale** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x_1 + a_0,$$

où $0 \leq n \in \mathbb{N}$ et les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Exemples:

1. Les fonctions $f(x) = x^3 - 7x^2 + x + 2$, $p(x) = x^8 + 10000x - \pi$, et $g(x) = 1$ sont des fonctions polynomiales.

2. Les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes:

$$\ell(y) = \frac{y^2+1}{y^3+y+2} \quad \text{et} \quad \nu(x) = \sqrt{\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}}.$$

Une **fonction rationnelle** est une fonction qui prend la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes; $f(x)$ est définie si $q(x) \neq 0$.

Exemples:

1. Les fonctions suivantes sont rationnelles:

$$j(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x+2},\ k(x) = \frac{x^8+10000x-\pi}{x^3-7x^2+x+2},\ g(x) = 1,\ h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

2. La fonction suivante ne l'est pas: $\nu(x) = \sqrt{\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}}$.

Une **fonction algébrique** est une fonction qui est définie en combinant des racines $n-$ième et des fonctions rationnelles.

Exemples:

1. Les fonctions suivantes sont algébriques:

$$m(x) = \sqrt{\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}},\ z(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1},\ g(x) = 1,\ q(x) = \sqrt[3]{x}.$$

2. La fonction suivante n'est ni algébrique, ni rationnelle, ni polynomiale:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques:

- Tout polynôme est rationnel, mais il existe des fonctions rationnelles qui ne sont pas des polynômes.
- Tout polynôme est algébrique, mais il existe des fonctions algébriques qui ne sont pas des polynômes.
- Toute fonction rationnelle est algébrique, mais il existe des fonctions algébriques qui ne sont pas rationnelles.

$$\{\text{polynômes}\} \subsetneq \{\text{fonctions rationnelles}\} \subsetneq \{\text{fonctions algébriques}\}$$

Si $f(x)$ est algébrique et $f(a)$ existe, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) :$$

une fonction algébrique est continue partout où elle est définie.

Si $f(a)$ n'est pas définie, la fonction est discontinue en $x = a$; il se peut quand même que la limite existe, mais

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a).$$

Dans ce cas, il y a un "trou" sur la courbe $y = f(x)$ en $x = a$.

Si au contraire la limite n'existe pas, il peut y avoir une **asymptote verticale** en $x = a$. Nous en reparlerons au chapitre 6.

Scénario – La limite du quotient différentiel

Lors du calcul de la pente de la droite tangente, de taux d'accroissement ou de la vitesse d'un objet, nous devons évaluer une limite de la forme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si $f(x)$ est algébrique, alors le quotient différentiel

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

l'est aussi (la variable est h, dans ce contexte).

Par exemple, si on cherche la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ en $P(3, 9)$, le quotient différentiel en question est

$$\frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}.$$

Selon ce que nous venons de discuter, il devrait être possible de calculer la limite en substituant $h = 0$ directement dans le quotient différentiel: nous obtenons une expression de la forme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \text{ “} = \text{” } \frac{(3+0)^2 - 3^2}{0} \text{ “} = \text{” } \frac{0}{0}??$$

⚠ **De toute évidence, les propriétés des limites ne s'appliquent pas directement ici. Comment calcule-t-on la limite recherchée?**

4.3 – Les formes indéterminées

Considérons les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

f est rationnelle pour $x \neq 2$, et g est algébrique pour $x \neq 0$. Quel est le comportement de f lorsque $x \to 2$? Celui de g lorsque $x \to 0$?

Si on essaye de calculer les limites par substitution, nous obtenons des **quotients indéterminés de la forme** $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \frac{0}{0}.$$

⚠ **L'expression $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens en mathématiques.**

On ne peut nécessairement en conclure que la limite n'existe pas; si elle existe, il faut la calculer d'une autre manière c'est tout.

Que fait-on, dans ce cas? Cela dépend de la nature de la fonction.

Par exemple, on peut ré-écrire $g(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}, \quad \text{pour } x \neq 0. \end{aligned}$$

Mais lorsque $x \to 0$, on a $x \neq 0$, d'où

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{2} = 1.$$

On peut aussi ré-écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2, \quad \text{pour } x-2 \neq 0.$$

Mais lorsque $x \to 2$, on a $x-2 \neq 0$, d'où

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

⚠ **La situation est différente si, après substitution, on obtient un quotient de la forme $\frac{*}{0}$, où $* \neq 0$. Nous en reparlerons au chapitre 6.**

Méthodes de calcul

On identifie 4 méthodes pour calculer la limite d'un quotient indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$:

1. la factorisation (fonctions rationnelles);
2. la rationalisation (fonctions qui contiennent une différence de racines);
3. les limites à droite et à gauche (fonctions qui contiennent des valeurs absolues), et
4. le changement de variables, dans les autres cas.

Avant même de commencer l'évaluation, il faut vérifier si le quotient est indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$. Si ce n'est pas le cas, on y va tout simplement par **substitution directe**. Sinon, **IL FAUT ESSAYER QQCH D'AUTRE**.

On illustre comment s'y prendre dans les autres cas à l'aide d'exemples.

Factorisation: si le quotient est une fonction rationnelle, on **factorise** le numérateur et le dénominateur, et on **simplifie** les facteurs communs, comme dans l'exemple

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2};$$

après la simplification, on calcule la limite par substitution directe.

Il faut savoir factoriser les polynômes pour que cette méthode soit utile (consulter le chapitre 3 pour un rappel).

Rationalisation: si le quotient contient une différence de racines, on multiplie le quotient au numérateur et au dénominateur par le **conjugué de la différence des racines**, et on **simplifie** les facteurs communs, comme dans l'exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

après la simplification, on calcule la limite par substitution directe.

Le conjugué d'une différence de racines est tout bonnement la somme de ces mêmes racines: le conjugué de $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ est $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, celui de $\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}$ est $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}$, etc.

Limites à gauche et à droite: si le quotient contient des valeurs absolues, on ré-écrit la fonction avec ses **restrictions**; la limite recherchée existe si et seulement si les limites à gauche et à droite sont identiques.

Par exemple, considérons la fonction

$$h(x) = \frac{x|x-2|}{x-2}.$$

Lorsque $x \to 2$, $h(x)$ est indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$. On ré-écrit sous la forme

$$h(x) = \frac{x|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x(x-2)}{x-2}, & \text{si } x > 2 \\ \frac{x(2-x)}{x-2}, & \text{si } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{si } x > 2 \\ -x, & \text{si } x < 2 \\ \text{indéfinie} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

On vérifie si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x|x-2|}{x-2}$ existe en évaluant les limites directionnelles:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x = 2 \quad \text{mais}$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (-x) = -2;$$

dans ce cas, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ n'existe pas.

Il faut savoir composer avec les valeurs absolues pour que cette méthode soit utile (consulter le chapitre 3 pour un rappel).

(Et il faut se rappeller comment calculer les limites à droite et à gauche...)

Changement de variables: si les trois méthodes précédentes n'aident pas, on s'y prend d'une autre manière.

Par exemple, considérons la fonction

$$k(x) = \frac{(x+1)^{1/3} - 1}{x}.$$

Lorsque $x \to 0$, $k(x)$ est indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$. Pour se débarasser de la division par 0 au dénominateur, on effectue un **changement de variables**.

Soit $u = (x+1)^{1/3}$. Alors $u^3 = x + 1$ et $x = u^3 - 1$. Lorsque $x \to 0$, on a $u^3 - 1 \to 0$, c'est-à-dire $u^3 \to 1$, d'où $u \to 1$. Puisque $x \neq 0$, $u \neq 1$.

Dans ce cas,

$$\frac{(x+1)^{1/3}-1}{x} = \frac{u-1}{u^3-1} = \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{u^2+u+1},$$

lorsque $u-1 \neq 0$. Mais

$$\lim_{u\to 1} u = \lim_{x\to 0}(x+1)^{1/3} = (0+1)^{1/3} = 1,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{1/3}-1}{x} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{u^2+u+1} = \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3}.$$

La limite recherchée est donc $\frac{1}{3}$.