MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 6
Les applications de la dérivée

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Aperçu

6.1 – Les dérivées d'ordre supérieur

Soit $y = f(x)$ une fonction. La dérivée

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

est aussi une fonction, qu'on peut dériver de nouveau.

La **seconde dérivée** de $f(x)$, ou dérivée du **deuxième ordre**, est:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \left(f'\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

La seconde dérivée calcule la pente de la droite tangente à la courbe de la fonction dérivée.

En général, il existe des dérivées de tout ordre n, que l'on dénote par $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ ou $f^{(n)}(x)$, ou encore à l'aide de chiffres romains $f^{\mathsf{VII}}(x)$, etc.

Exemples:

1. Calculer toutes les dérivées de $f(x) = x^3$.

2. Soit $m^2 + n^2 = 4$. Calculer $\frac{d^2m}{dn^2}$ et $\frac{d^2n}{dm^2}$.

L'accélération

La première dérivée du déplacement correspond à la vitesse. Qu'en est-il de sa dérivée seconde?

Exemple: au chapitre 2, on vous propose un fou dans sa montgolfière qui laisse tomber des boules de quilles qui parcourent

$$s(t) = 6t^2 \text{ m après } t \text{ sec;}$$

la vitesse de la boule de quille après t secondes est alors

$$v(t) = s'(t) = 6(2)t^{2-1} = 12t \text{ m/sec.}$$

La boule se déplace plus rapidement après 2 secondes qu'après 1 seconde en raison de la force gravitationnelle exercée par la Terre.

Le taux de variation de la vitesse est l'**accéleration**; on le dénote par $a(t)$ et on la mesure m/sec^2. L'accélération est donc la **dérivée de la vitesse** et la **seconde dérivée du déplacement**.

Dans cet exemple, l'accélération de la boule est constante:

$$a(t) = 12 \text{ m/sec}^2.$$

Dans un problème de "chute libre," l'accélération est toujours constante.

⚠ En réalité, l'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la Terre est de 9.8m/sec^2 – le modèle de l'exemple n'offre qu'une approximation grossière de la réalité.

En résumé,

$$a(t) = v'(t) = s''(t), \quad v(t) = s'(t), \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Exemples:

1. Supposons qu'un objet se déplace selon

$$s = \frac{t}{t^2+5}$$

lorsque $t \geq 0$. À quel instant est-ce que l'objet revient sur ses pas? Quelle est sa position à ce moment? Son accélération?

Solution: À l'instant où l'objet revient sur ses pas, on a $v = 0$.

Mais ce n'est pas une condition suffisante $\implies$ $v = 0$ ne garantit pas que l'objet se retourne, mais seulement qu'il s'arrête.

Pour qu'il se retourne, sa vitesse doit subir un changement de signe; c'est-à-dire qu'il doit être en transition entre s'en aller (vitesse positive) et revenir (vitesse négative), ou vice-versa.

D'après la définition de la vitesse, nous obtenons

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{(t^2+5) - t(2t)}{(t^2+5)^2} = \frac{5-t^2}{(t^2+5)^2}.$$

On voit que $v(t) = 0$ lorsque $5 - t^2 = 0 \implies t = \pm\sqrt{5}$; puisque $t \geq 0$, on élimine $t = -\sqrt{5}$.

Il ne reste qu'à vérifier que la vitesse change effectivement de signe lorsque $t = \sqrt{5}$:

$$0 \leq t < \sqrt{5} \iff t^2 < 5 \iff 0 < 5 - t^2 \iff 0 < \frac{5 - t^2}{(t^2 + 5)^2} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{5} < t \iff 5 < t^2 \iff 5 - t^2 < 0 \iff \frac{5 - t^2}{(t^2 + 5)^2} < 0.$$

L'objet revient donc sur ses pas à cet instant. Notez que

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{(5 - t^2)'(t^2 + 5)^2 - (5 - t^2)\left((t^2 + 5)^2\right)'}{\left((t^2 + 5)^2\right)^2} \\ &= \frac{-2t(t^2 + 5)^2 - (5 - t^2)2(t^2 + 5)(2t)}{(t^2 + 5)^4} = \frac{2t(t^2 - 15)}{(t^2 + 5)^3}. \end{aligned}$$

Alors

$$s(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad a(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}((\sqrt{5})^2 - 15)}{((\sqrt{5}^2 + 5)^3} = -\frac{\sqrt{5}}{50}.$$

2. Supposons qu'un palmier et un kangourou se déplacent en ligne droite selon $s_1(t) = 4t - t^2$ et $s_2(t) = 6t^2 - t^3$, respectivement. Quelles sont les vitesses respectives lorsque les accélérations sont identiques?

Alors

$$s(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad a(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}((\sqrt{5})^2-15)}{((\sqrt{5}^2+5)^3} = -\frac{\sqrt{5}}{50}.$$

2. Supposons qu'un palmier et un kangourou se déplacent en ligne droite selon $s_1(t) = 4t - t^2$ et $s_2(t) = 6t^2 - t^3$, respectivement. Quelles sont les vitesses respectives lorsque les accélérations sont identiques?

Solution: Il faut trouver les accélérations. Notez que

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 4t - t^2 & s_2(t) &= 6t^2 - t^3 \\ v_1(t) &= s_1'(t) = 4 - 2t & v_2(t) &= s_2'(t) = 12t - 3t^2 \\ a_1(t) &= v_1'(t) = -2 & a_2(t) &= v_2'(t) = 12 - 6t. \end{aligned}$$

Les accélérations sont égales lorsque

$$a_1(t) = a_2(t) \implies -2 = 12 - 6t \implies t = \frac{7}{3}.$$

Nous obtenons alors

$$v_1(7/3) = 4-2(7/3) = -2/3 \quad \text{et} \quad v_2(7/3) = 12(7/3)-3(7/3)^2 = 35/3.$$

On remarque que les deux objets se dirigent donc des directions opposées à cet instant puisque les signes des vitesses sont différents.

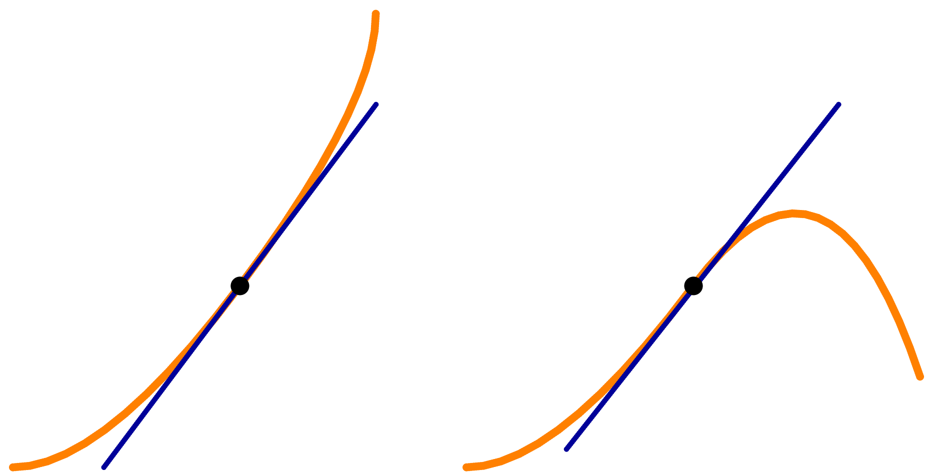
⚠ La troisième dérivée du déplacement s'appelle l'**à-coup** ("jolt"), la quatrième dérivée, le **snap**. Leurs applications sont limitées.

6.2 – L'optimisation d'une fonction

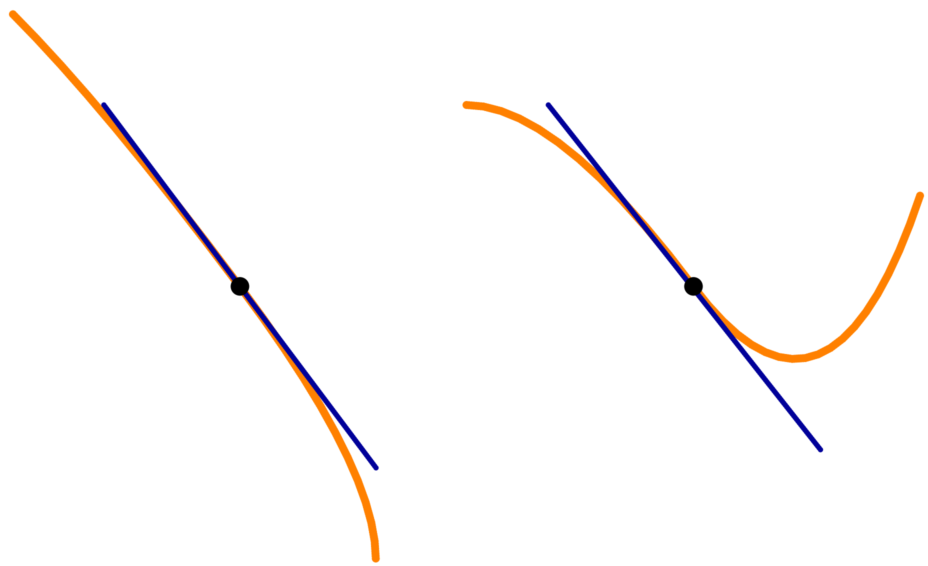
L'optimisation est sans doute l'application la plus commune de la dérivée.

Soit $y = f(x)$ une courbe et $x = a$.

Si $f'(a) > 0$, alors $f(x)$ est **croissante** $(\nearrow)$ près de $x = a$.



Si $f'(a) < 0$, alors $f(x)$ est **décroissante** ($\searrow$) près de $x = a$.



Que ce passe-t-il si $f'(a) = 0$?

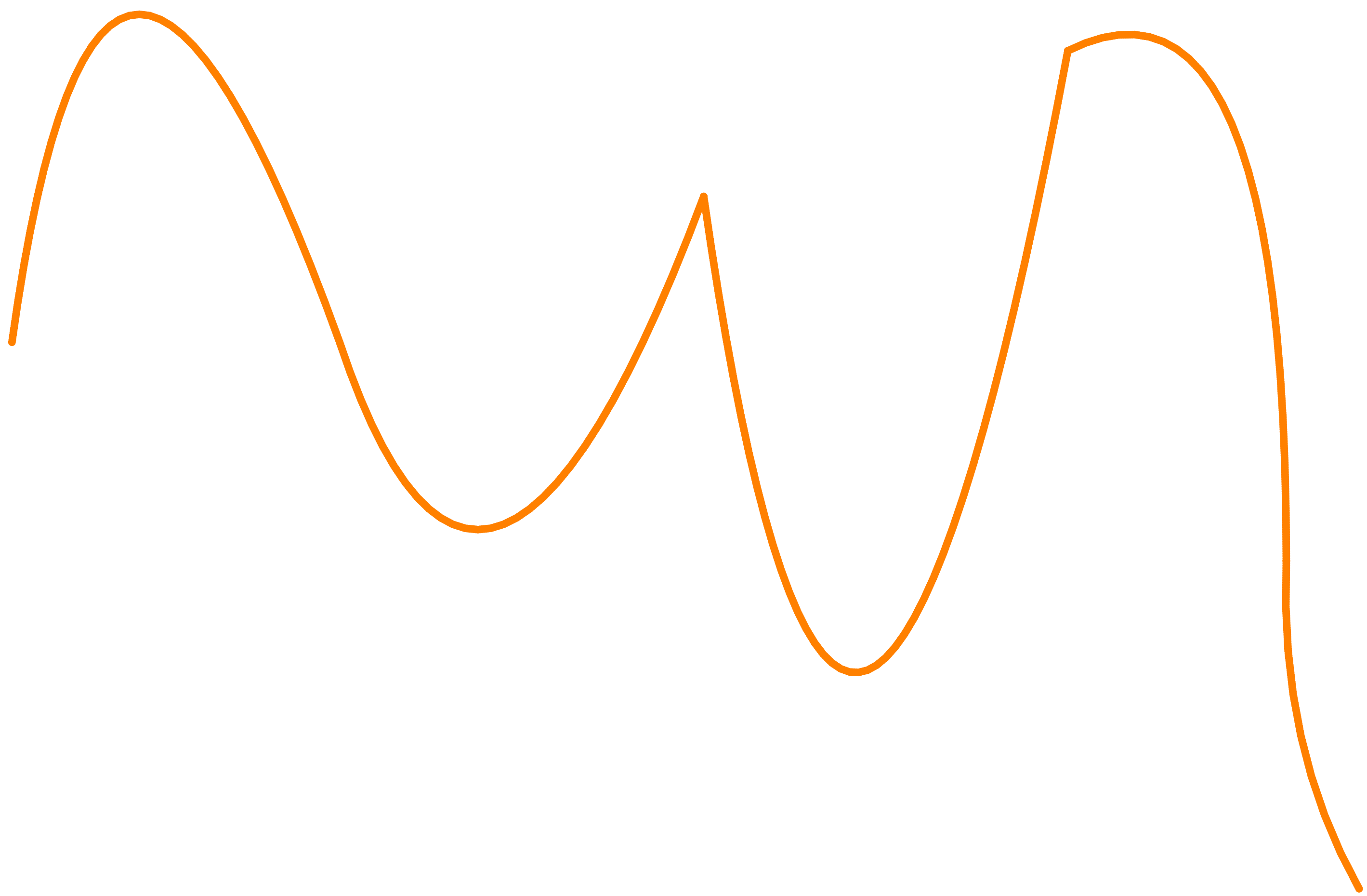
La fonction possède alors une droite tangente **horizontale**.

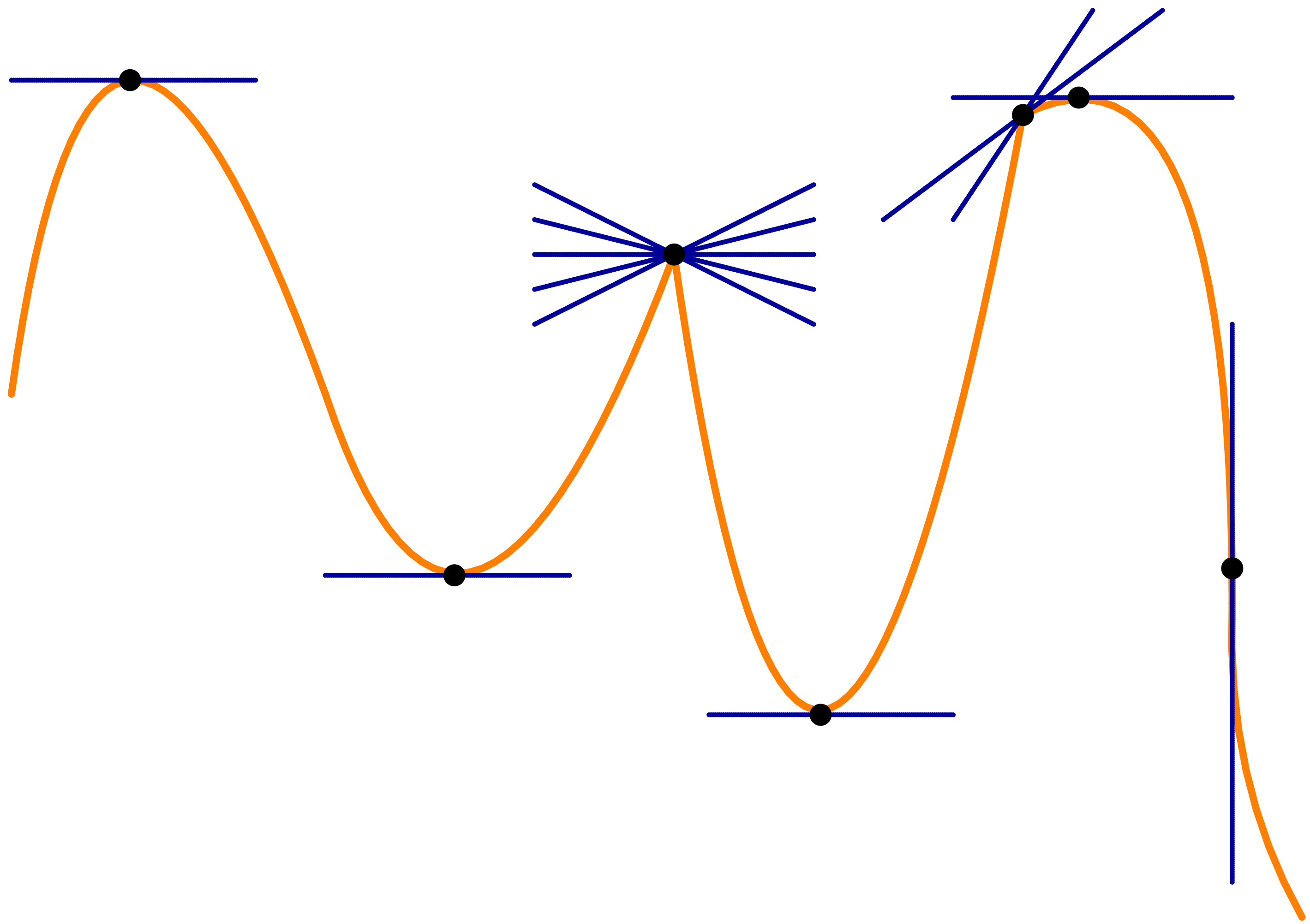
Les points où la fonction passe de $\nearrow$ à $\searrow$, ou vice-versa, sont les **extréma locaux** de la fonction: on a un

- **maximum local** lorsque la fonction passe de $\nearrow$ à $\searrow$;
- **minimum local** lorsque la fonction passe de $\searrow$ à $\nearrow$.

Ceci peut se produire de deux façons:

1. $f'(x) = 0 \implies$ la pente de la droite tangente est nulle;
2. $f'(x)$ n'existe pas $\implies$ la pente de la droite tangente est indéfinie.





Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet un **extrémum local** (une valeur maximale ou minimale) l'atteint à l'un de ces points.

Les valeurs $x \in D_f$ où $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas sont les **points critiques** de la fonction. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, il faut inclure les bornes lors de la recherche d'**extréma globaux**.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On obtient la valeur maximale et la valeur minimale globale de f à l'aide de la méthode suivante:

1. Trouver les points critiques de f dans $[a, b]$.

2. Évaluer f en $x = a$ et $x = b$, ainsi qu'aux points critiques trouvés en 1.

3. La plus grande (petite) valeur obtenue en 2 est le maximum (minimum) global de f.

Exemples: trouver les extréma globaux des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $0 \leq x \leq 2$.

2. $g(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$, $0 \leq x$.

La marche à suivre

Les problèmes d'optimisation ne sont pas toujours présentés de façon si évidente. Pour résoudre de tels problèmes, on suit les étapes suivantes.

1. Faire un diagramme (s'il est possible de le faire).

2. Introduire n variables pour représenter les quantités, ainsi que les bornes inférieures et supérieures de ces variables.

3. Touver $n-1$ équations reliant ces variables.

4. Exprimer $n-1$ des variables en fonction de celle qui reste, en se servant des $n-1$ équations obtenues en 3.

5. Introduire la quantité à maximiser/minimiser.

6. Exprimer cette quantité à l'aide d'une seule variable.

7. Trouver les points critiques de la quantité à maximiser/minimiser se retrouvant entre les bornes.

8. Établir une liste de candidats (points critiques entre les bornes + bornes).

9. Évaluer la fonction à chacun des points dans la liste.

10. Répondre à la question.

Exemples:

1. Une fermière désire construire un enclos rectangulaire dans l'un de ses prés pour éviter que les lamas qui y broûtent ne se sauvent.

   Elle dispose de 2000m de clôture. Elle aimerait que l'un des côtés de l'enclos se retrouve au bas d'un escarpement (c'est-à-dire qu'elle n'y placera pas de clôture).

   Pour le comfort des bêtes, elle aimerait de plus que chacun des côtés de l'enclos mesure au moins 10m.

   Quelle est l'aire maximale de l'enclos qu'elle puisse construire?

   Solution: on utilise les 10 étapes de la marche à suivre.

2. On utilise un ceintre de métal afin de construire un mobile pour bébé. En "dépliant" le ceintre, on obtient une tige de métal de 1m de longueur. Cette tige est ensuite coupée en deux: la première partie est tordue pour former la circonférence d'un cercle, la seconde pour former un carré. Ensuite, on utilise des feuilles de carton afin de couvrir les formes.

   Les experts suggèrent que le périmètre de chaque composante devrait mesurer au moins 15cm pour que le bébé puisse bien distinguer les composantes du mobile.

   Supposons qu'un ceintre coûte $1.92\$$ et qu'une feuille de carton de 500cm^2 coûte $1.00\$$. Quel est le coût minimal de fabrication d'un mobile?

3. Une somme de 1200$ est investie dans un fond mutuel à risque élevé.

   Pendant les trois premières années, la valeur de l'investissement est

$$V(t) = 1000\left((t-\sqrt{2})^2 - 1\right)^{2/3} + 200.$$

   À quel instant la valeur de l'investissement est-elle minimale? Maximale?

6.3 – L'étude d'une fonction

Dans plusieurs cas, il peut être avantageux de tracer le graphique d'une fonction dont nous cherchons les points critiques ou les extréma.

L'information pertinente comprend:

- les asymptotes verticales et horizontales;
- les intervalles de croissance, et
- les intervalles de concavité,

que l'on obtient par l'entremise de dérivées d'ordre 0, 1, et 2.

Les asymptotes verticales

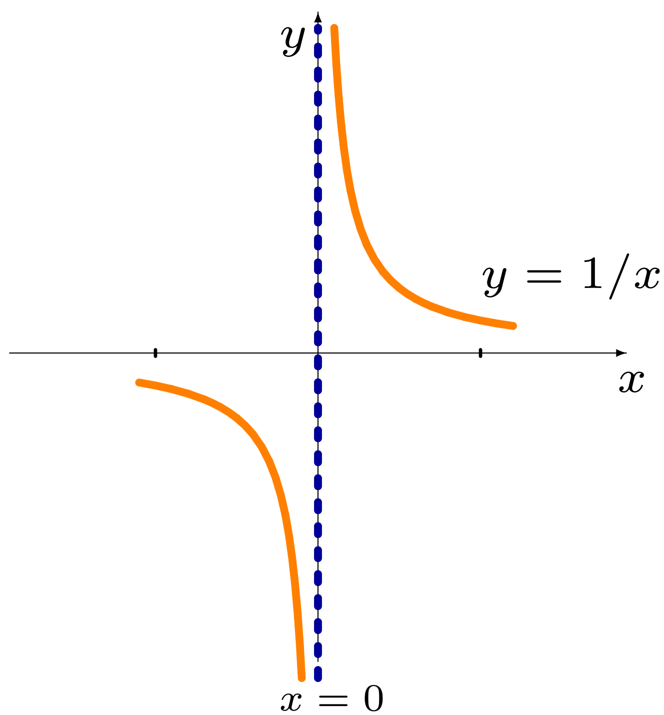
Le domaine de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. C'est une fonction continue, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$ si $a \neq 0$. Que se passe-t-il à $a = 0$?

On évalue la limite en calculant les limites à gauche et à droite:

x	$1/x$	x	$1/x$
-1	-1	1	1
-0.1	-10	0.1	10
-0.01	-100	0.01	100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	$?$	0	$?$

La limite n'existe pas: les valeurs de $\frac{1}{x}$ augmentent sans borne lorsque $x \to 0^+$, et elles diminuent sans borne lorsque $x \to 0^-$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$



La courbe ne touche pas la droite $x = 0$ (l'axe des y) puisque la fonction n'est pas définie en $x = 0$: c'est une **asymptote verticale** de $f(x) = \frac{1}{x}$.

En général, la fonction f possède une asymptote verticale en $x = a$ si (au moins) une des quatre relations suivantes est vérifiée:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

⚠ Une fonction possède souvent une asymptote verticale là où son dénominateur est nul, **mais ce n'est pas toujours le cas** – faîtes attention aux quotients indéterminés de la forme $\frac{0}{0}$!

⚠ **Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres: on ne s'en sert que pour décrire le comportement de la fonction.**

Il est possible d'effectuer un certain type d'arithmétique avec ces symboles. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les relations suivantes sont valides:

$$a + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) - a = \pm\infty, \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty, \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \qquad a\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}, \qquad \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Les expressions suivantes sont **indéterminées** (il faut essayer une autre approche!):

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}, \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Exemples: trouver les asymptotes verticales des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3-x}{x}$.

Solutions: on trouve les endroits où le dénominateur de la fonctions est nul, puis on calcule les limites à droite et à gauche à ces endroits.

Les asymptotes horizontales

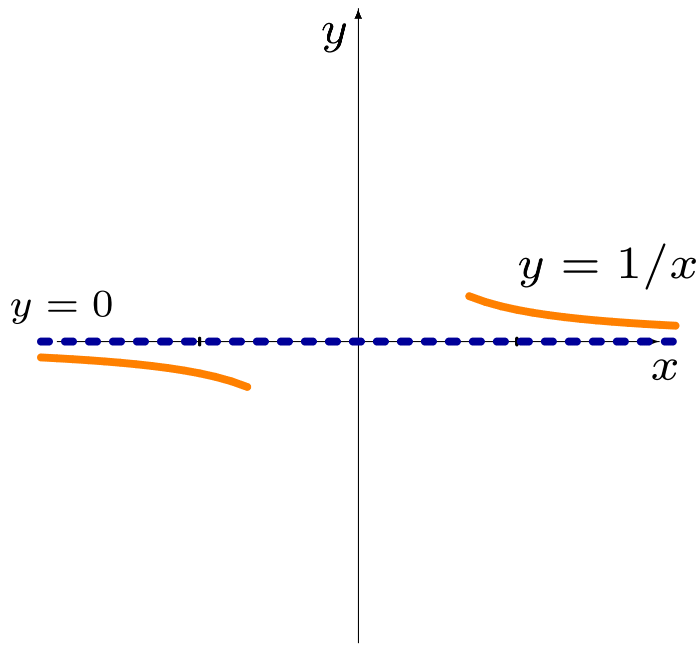
Les **asymptotes horizontales** sont reliées au comportement **éventuel**.

Quel est le comportement éventuel de $f(x) = \frac{1}{x}$? On le détermine à l'aide de limites $x \to \pm\infty$.

x	$1/x$	x	$1/x$
-1	-1	1	1
-10	-0.1	10	0.1
-100	-0.01	100	0.01
-1000	-0.001	1000	0.001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	0	$+\infty$	0

Lorsque $x \to +\infty$, les valeurs de $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 (par le haut); lorsque $x \to -\infty$, $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 (par le bas):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$$



Dans ce cas, la droite $y = 0$ (l'axe des x) est une **asymptote horizontale** de $f(x) = \frac{1}{x}$.

En général, la fonction f possède une asymptote horizontale en $y = L$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

⚠ **Une fonction possède au plus 2 asymptotes horizontales:** une dans chaque direction ($x \to \pm\infty$). Elle peut aussi n'en posséder aucune (i.e. $f(x) = x$), ou n'en posséder qu'une seule (i.e. $f(x) = 1/x$).

⚠ Le graphique de la fonction **peut couper une asymptote horizontale** à plusieurs reprise (en contraste aux asymptotes verticales).

⚠ On évalue souvent les asymptotes horizontales en remplaçant la variable par $\pm\infty$ – **faîtes attention aux formes indéterminés $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $+\infty - \infty$!**

Exemples: trouver les asymptotes horizontales des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+x-2}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Solutions: on évalue les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Si $f(x)$ est une fonction rationnelle, c'est à dire qu'elle est définie par

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

il est facile de trouver ses asymptotes verticales et horizontales:

1. on factorise le numérateur et le dénominateur et on simplifie;
2. f possède une asymptote verticale à tous les endroits où le dénominateur de la fonction simplifiée est nul;
3. si $n > m$, il n'y a pas d'asymptote horizontale; si $n = m$, f possède une asymptote horizontale en $y = \frac{a_n}{b_m}$; si $n < m$, f possède une asymptote horizontale en $y = 0$.

Exemples: trouver les asymptotes verticales et horizontales des fonctions rationnelles suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-3x+2}$.

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{-2x}{x^2-2x+1}$.

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$.

4. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$.

Solutions: on utilise la marche à suivre pour les fonctions rationnelles.

Les intervalles de croissance

Soient $f(x)$ continue sur $[c, d]$ et différentiable sur $]c, d[$, et $x_0 \in]c, d[$:

- si $f'(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 sur lequel $f \nearrow$;
- si $f'(x_0) < 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant x_0 sur lequel $f \searrow$;
- autrement, x_0 est un point critique.

L'union de tous les intervalles où $f \nearrow$ $(f' > 0)$ forme les **intervalles de croissance** $(\mathrm{I.\,C.})$ de f; l'union de tous les intervalles où $f \searrow$ $(f' < 0)$ forme les **intervalles de décroissance** de f $(\mathrm{I.\,D.})$.

En général, on trouve $\mathrm{I.C.}$ et $\mathrm{I.D.}$ pour une fonction algébrique en trouvant ses points critiques et ses asymptotes verticales: chaque intervalle entre deux de ces points consécutifs est un intervalle de croissance ou un intervalle de décroissance.

Exemples: trouver $\mathrm{I.C.}$ et $\mathrm{I.D.}$ pour les fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

On peut obtenir le signe de la dérivée dans le **tableau des signes** en raisonnant comme dans les deux premiers exemples, avec les inéquations.

On peut aussi l'obtenir en évaluant $f'(x)$ en un point représentatif de chaque intervalle, puisque la dérivée ne change pas de signe dans un tel intervalle; $f'(-2)$, $f'(-1/2)$, $f'(1/2)$, et $f'(2)$, mettons, dans le dernier exemple.

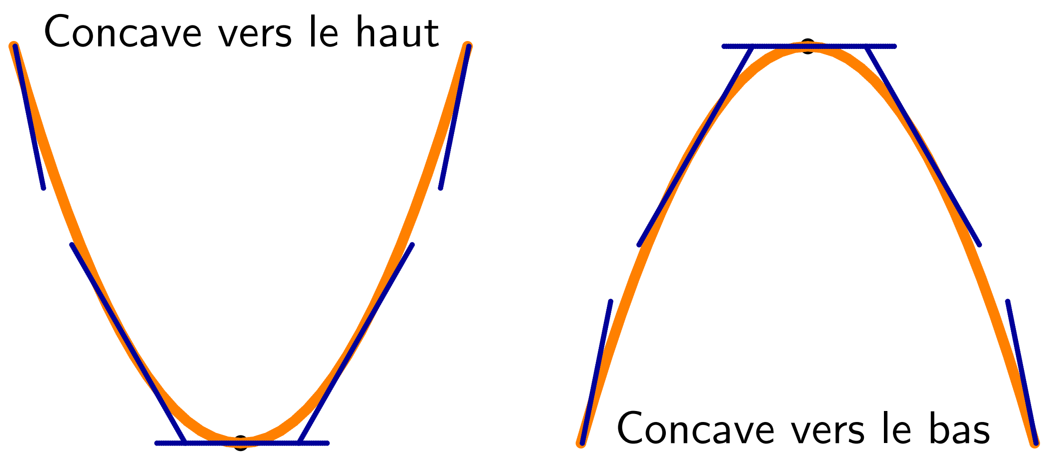
⚠ **Ce truc ne fonctionne que si $f(x)$ est continue sur les intervalles successifs entre les points repères (points critiques et asymptotes verticales)**.

Avec n **points repères**, il y a $n+1$ intervalles, et $n+1$ points représentatifs.

Les intervalles de concavité

Soit $y = f(x)$ une courbe et $x = a$.

Si $f''(a) > 0$, alors f est **concave vers le haut** ($\smile$) et $f' \nearrow$ près de a.
Si $f''(a) < 0$, alors f est **concave vers le bas** ($\frown$) et $f' \searrow$ près de a.



Une courbe est

- **concave vers le haut** si elle “s’ouvre vers le haut,” ou si la droite tangente à la courbe se retrouve sous la courbe;
- **concave vers le bas** si elle “s’ouvre vers le bas,” ou si la droite tangente à la courbe se retrouve en haut de la courbe.

Les points du domaine de f où la fonction change de concavité sont les **points d’inflexion**; pour que cela se produise, on doit avoir soit $f''(a) = 0$ ou soit $f''(a)$ n’existe pas.

⚠ **Ce n’est pas une condition suffisante. On peut avoir $f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ n’existe pas sans changement de concavité.**

Soient $f(x)$ continue sur $[c, d]$ et doublement différentiable sur $]c, d[$, et $x_0 \in]c, d[$:

- si $f''(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 sur lequel $f \smile$;
- si $f''(x_0) < 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant x_0 sur lequel $f \frown$;
- autrement, x_0 est **peut-être** un point d'inflexion.

L'union de tous les intervalles où $f \smile$ $(f'' > 0)$ forme les **intervalles de concavité positive** $(\mathrm{I.\,H.})$ de f; l'union de tous les intervalles où $f \frown$ $(f'' < 0)$ forme les **intervalles de concavité négative** de f $(\mathrm{I.\,B.})$.

On dénote l'ensemble des points de D_f où $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas par INFL_f.

En général, on trouve $\mathrm{I.\,H.}$ et $\mathrm{I.\,B.}$ pour une fonction algébrique en trouvant tous les points $x \in \mathrm{INFL}_f$ ou les points où f possède une asymptote verticale: chaque intervalle entre deux de ces points consécutifs est un intervalle de concavité positive ou un intervalle de concavité négative.

Exemples: trouver $\mathrm{I.\,C.}$ et $\mathrm{I.\,D.}$ pour les fonctions suivantes.

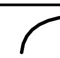
1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+7$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+1$.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

La marche à suivre

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f'(a), f''(a) \neq 0$, le comportement de $f(x)$ près de a est donné par le tableau suivant:

$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$				

Nous sommes maintenant en mesure d'esquisser le graphique de toute fonction algébrique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la marche à suivre présentés aux pages suivantes.

⚠ **Le graphique sera nécessairement inexact, mais il préservera les particularités "essentielles" de la fonction.**

1. Déterminer le domaine de définition de f (endroits où f est définie).

2. Trouver les asymptotes verticales de la fonction (comportement lorsque f n'est pas définie).

3. Trouver les asymptotes horizontales de la fonction (comportement de f aux extrémités).

4. Trouver les zéros de la fonction et l'ordonnée à l'origine ($x = 0$ et $y = 0$, lorsqu'il est possible de le faire).

5. Trouver les points critiques ($f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas).

6. Trouver les "points d'inflexion" ($f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas).

7. Séparer l'ensemble des réels en intervalles à l'aide des points trouvés en 2, 5 et 6.

8. Créer le tableau des signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ (en utilisant un point par intervalle, au besoin) et déduire le comportement de la courbe.

9. Identifier les extréma (max/min) et points d'inflexion de f (points où $f''(x)$ change de signe) et calculer la valeur de f en ces points.

10. Tracer la courbe.

On illustre la marche à suivre à l'aide de 2 exemples représentatifs.

Exemple: esquisser le graphique de $y = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$.

Exemple: esquisser le graphique de $y = x(x-1)^3$.

La marche à suivre donne, en théorie, une méthode pour tracer le graphique de toute fonction algébrique (en fait, de toute fonction **continue par morceaux**).

⚠ En pratique, il peut s'avérer très difficile de trouver les points critiques et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

lorsque $\deg p(x), \deg q(x)$ sont élevés.

Le problème devient alors un problème de recherche de racines, et il faut utiliser des méthodes numériques (en dehors du cadre de ce cours).