MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 8
Les applications de l'intégrale

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Aperçu

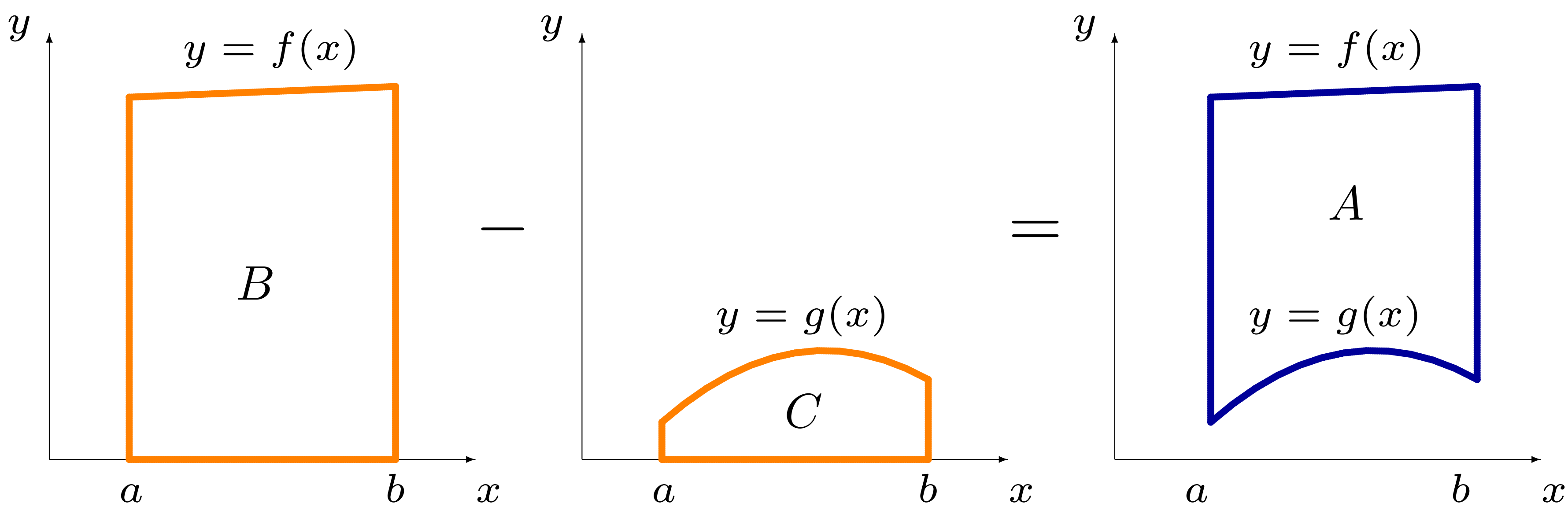
8.1 – L'aire d'une région bornée par des courbes

Lors du chapitre précédent, nous avons introduit des techniques nous permettant de déterminer les primitives de plusieurs fonctions algébriques.

L'intégrale définie $(> 0, < 0, = 0)$ est utilisée pour déterminer l'"aire" $(> 0, < 0, = 0)$ entre la courbe, l'axe des x, et les droites $x = a$ et $x = b$.

Dans plusieurs applications, il faut calculer l'**aire entre deux courbes**; dans ce cas, on entend le concept physique de l'aire (> 0).

Si $y = f(x)$ et $y = g(x)$ représentent deux courbes sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, on cherche à mesurer l'aire A de la région bornée inférieurement par $y = g(x)$, supérieurement par $y = f(x)$, à gauche par $x = a$ et à droite par $x = b$.



L'aire recherchée est $A = B - C$. Nous avons vu au chapitre 7 que

$$B = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad C = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Alors
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$
Si au contraire $g(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, nous obtenons

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

En général, on peut avoir $f(x) \geq g(x)$ pour certains x, et $g(x) \geq f(x)$ pour d'autres; on combine ces possibilités pour obtenir

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$
Puisque la valeur absolue est toujours positive, l'aire entre deux courbes le sera également (à moins que $f = g$ ou $a = b$).

La marche à suivre

Voici la procédure pour calculer l'aire entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sur $[a, b]$:

1. trouver tous les points d'intersection de f et g (i.e. les points où $f(x) = g(x)$);

2. intégrer $|f(x) - g(x)|$ sur les intervalles déterminés par les points d'intersection, et

3. additionner les résultats obtenus à l'étape 2.

Les problèmes ne se présentent pas toujours de cette façon; il faut parfois faire un peu de travail avant de commencer à intégrer.

Exemples:

1. Calculer l'aire entre les courbes $y = x^2+1$ et $y = x$ sur l'intervalle $[-1, 2]$.

Les régions plus complexes

Comment compose-t-on avec des régions bornées par plus de deux courbes?

Dans ce type de problème, on commence par tracer toutes les courbes. La figure obtenue possède plusieurs sommets, dont chacun est le point d'intersection d'une des paires de courbes.

On trace ensuite des **droites verticales** à partir de chacun des sommets, ce qui divise la figure en plusieurs régions, chacune bornée par deux courbes (pas nécéssairement les mêmes d'une région à l'autre).

En additionnant la superficie de chacune de ces sous-régions, on obtient la superficie totale de la région.

Exemples:

1. Calculer l'aire de la région bornée par $y = x$, $y = 1 - x$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

2. Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -\frac{1}{2}x$ et $y = \frac{10}{9}x - \frac{29}{9}$, lorsque $x \geq 0$.

8.2 – L'accélération, la vitesse et le déplacement

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, si un objet se déplace selon $s(t)$, sa vitesse est $v(t) = s'(t)$ et son accélération est $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Autrement dit, la vitesse est une **primitive de l'accélération** et le déplacement est une **primitive de la vitesse**:

$$v(t) = \int a(t)\,dt \quad \text{et} \quad s(t) = \int v(t)\,dt.$$

Selon le théorème fondamental du calcul, on obtient:

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \quad \text{et} \quad s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Exemples:

1. Une aviatrice distraite laisse tomber un biscuit de son biplan en vol (à une altitude de 2km). Il se dirige vers le sol avec une accélération constante de 10m/sec^2. Quand atteint-il le sol?