MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 9
Les fonctions transcendantes et les intégrales impropres

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Le calcul dans la joie (Boily et Hart)

Aperçu

Scénario – Les puissances réelles

Au chapitre 3, nous avons vu que les puissances rationnelles sont vraiment des racines: en général

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad \text{si } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^{\times},\ \mathrm{pgdc}(m,n) = 1.$$

⚠ **Il y a des exceptions: 0^0 est une forme indéterminée, et $(-)^{m/n}$ n'est pas défini si n est pair.**

On peut donc évaluer des expressions comme 10^2, $10^{1/3}$ et $10^{-4/7}$. Mais qu'est-ce qu'une expression comme 10^{π} peut bien vouloir dire?

Puisque $\pi = 3.141592653\ldots$, on peut se servir du concept de la limite présenté au chapitre 4 pour présenter une solution possible.

y	10^y
3	1000
3.1	≈ 1258.9254
3.14	≈ 1380.3843
3.141	≈ 1383.5664
3.1415	≈ 1385.1602
3.14159	≈ 1385.4473
3.141592	≈ 1385.4536
$\downarrow$	$\downarrow$
π	$1385.4557...$

Si $f(y) = 10^y$ est une fonction continue (est-ce le cas?), alors

$$10^\pi = \lim_{y\to\pi} 10^y \approx 1385.4557.$$

Un des buts de ce chapitre est d'en venir à intégrer certaines fonctions algébriques dont les primitives ne sont pas algébriques, telles

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1},$$

À cette fin, nous introduisons les logarithmes et les exponentielles. Ces fonctions transcendantes viennent élargir l'ensemble des fonctions pour lesquelles les concepts et applications du calcul sont valables.

⚠ **Dans un cours plus avancé, c'est ici que l'on introduirait les fonctions trigonométriques et leurs réciproques.**

Ensuite, nous généralisons le concept de l'intégrale définie en présentant l'intégrale impropre; il y a un lien important entre cette notion et la notion de séries que nous avons étudié au chapitre 1.

9.1 – Les logarithmes

Les logarithmes ont été découverts par John Napier au 17ième siècle; ils permettent de remplacer les $\times$ dans les calculs par des $+$ (c'était très utile avant les calculatrices).

Les logarithmes se sont répandus dans la plupart des sciences: on les rencontre dans l'échelle de Richter (utilisée afin de mesurer la puissance d'un tremblement de terre), et l'échelle du pH (qui mesure l'acidité d'une solution), par exemple.

Soient $1 < b, 0 < x \in \mathbb{R}$. Le **logarithme de x à la base b**, dénoté par $\log_b x$, est l'exposant auquel il faut élever b pour obtenir x.

Exemples:

1. $\log_{10} 100 =$

2. $\log_2 8 =$

3. $\log_2 \frac{1}{4} =$

4. $\log_{166} 1 =$

5. $\log_{32} 32 =$

Exemples (et solutions):

1. $\log_{10} 100 = 2$ puisque $10^2 = 100$.
2. $\log_2 8 = 3$ puisque $2^3 = 8$.
3. $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ puisque $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
4. $\log_{166} 1 = 0$ puisque $166^0 = 1$.
5. $\log_{32} 32 = 1$ puisque $32^1 = 32$.

En général, les équations suivantes sont équivalentes:

$$y = \log_b x \quad \Longleftrightarrow \quad x = b^y.$$

Les propriétés des logarithmes

Les **propriétés essentielles** des logarithmes sont les suivantes: soient $b > 1$, $x, y > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$. Alors

L1. $\log_b 1 = 0$;

L2. $\log_b b = 1$;

L3. $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$;

L4. $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$;

L5. $\log_b x^r = r \log_b x$;

L6. $\log_b \left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_b y$;

L7. $\log_b (b^x) = x$;

L8. $b^{\log_b x} = x$.

Exemples:

1. $\log_{10} 20 =$

2. $\log_2 8 =$

3. Simplifier $\log_b \left(\frac{xy^2}{z}\right)^3$.

Exemples (et solutions):

1. $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10 = \log_{10} 2 + 1.$

2. $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$

3. Simplifier $\log_b \left(\frac{xy^2}{z}\right)^3$.

   Solution: en utilisant les propriétés, nous obtenons

$$\begin{aligned}\log_b \left(\frac{xy^2}{z}\right)^3 &= 3\log_b \frac{xy^2}{z} = 3(\log_b xy^2 - \log_b z) \\ &= 3(\log_b x + \log_b y^2 - \log_b z) \\ &= 3(\log_b x + 2\log_b y - \log_b z)\end{aligned}$$

4. Sur l'**échelle de Richter**, l'énergie E en joules d'un tremblement de terre est liée à sa puissance M selon l'équation

$$\log_{10} E = 4.4 + 1.5M.$$

Quelle est l'énergie d'un tremblement de terre atteignant 4.5 sur l'échelle de Richter?

Solution: d'après l'équation, $\log_{10} E = 4.4 + 1.5(4.5) = 11.15$. Posons $E = 10^x$. Ainsi

$$11.15 = \log_{10} E = \log_{10} 10^x = x,$$

selon **L7**, d'où $E = 10^{11.15} \approx 141253754462.28$ joules.

Puisque $11.15 \in \mathbb{Q}$, nous savons évaluer une expression de la forme

$$10^{11.15} = 10^{1115/100} = \sqrt[100]{10^{1115}}.$$

Si l'exposant est irrationel (dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), c'est moins évident.

Soient $b > 1$ une base et $x \notin \mathbb{Q}$. Puisque tout nombre réel à une représentation décimale, nous pouvons écrire

$$x = x_0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots, \quad \text{où } x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ pour } i \in \mathbb{N}^{\times} \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{Z}.$$

La représentation à 117 décimales ne peut pas être une pire approximation de x que celle à 3 décimales, par exemple:

$$\left|x_0.x_1x_2x_3x_4x_5...x_{117} - x\right| \leq \left|x_0.x_1x_2x_3 - x\right|;$$

On s'attend donc que $b^{x_0.x_1x_2x_3x_4x_5\cdots x_{117}}$ ne soit pas une pire approximation de b^x que $b^{x_0.x_1x_2x_3}$.

La valeur vers laquelle nous nous rapprochons en améliorant l'approximation de x est b^x.

Dans le scénario du début de ce chapitre, nous avons illustré que

$$10^\pi = \lim_{y\to\pi} 10^y \approx 1385.4557.$$

La fonction **logarithme de x à la base** b, où $b > 1$ est la fonction définie par $f(x) = \log_b x$, lorsque $x > 0$.

Toutes les bases ne jouissent pas du même statut; les entiers 10 (système décimal) et 2 (système informatique), et le nombre e sont plus communément utilisées.

Les logarithmes népériens

Le nombre e est défini par

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t}.$$

Il est difficile de démontrer l'existence de cette limite, mais on peut facilement donner une approximation numérique:

t	$(1+t)^{1/t}$
0.01	2.7048
0.001	2.7169
0.0001	2.7181
$\downarrow$	$\downarrow$
0^+	2.718281828...

C'est un nombre irrationnel, et il joue un rôle aussi important en mathématiques que le nombre π; c'est aussi le cas que

$$e^{i\pi} + 1 = 0!! \quad (\ldots!)$$

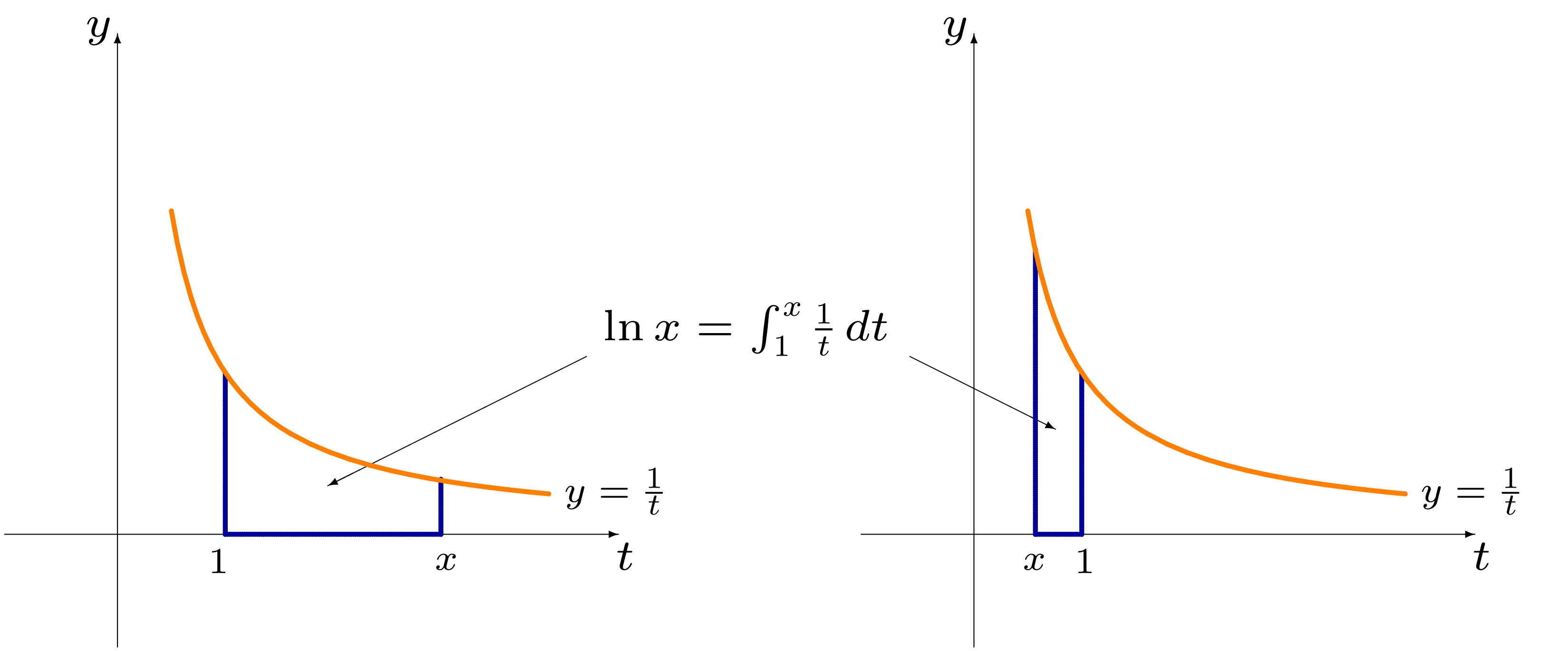
C'est cette base que nous utilisons, à moins d'avis contraire, et la fonction logarithme correspondante est le **logarithme népérien** (ou **logarithme naturel**, que l'on dénote par

$$f(x) = \ln x = \log_e x.$$

⚠ **On a un problème: pour s'assurer que $\ln x$ existe pour tout x, il faut que e^y existe même lorsque y est irrationnel. Le scénario du début du chapitre suggère que c'est le cas, mais une démonstration rigoureuse dépasse le cadre de ce cours. Il y a une alternative.**

Soit $x > 0$. La fonction **logarithme (népérien)** est définie par

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \text{aire sous la courbe } \frac{1}{t} \text{ entre } 1 \text{ et } x.$$



Selon le théorème fondamental du calcul, cette intégrale définie existe puisque la fonction $\frac{1}{t}$ est continue entre 1 et $x > 0$, et elle

En utilisant directement la définition, il est possible de montrer que le logarithme possède les propriétés suivantes:

si $x, y > 0$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

LN1. $\ln 1 = 0$;

LN2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

LN3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;

LN4. $\ln x^r = r \ln x$;

LN5. $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$;

LN6. $\lim_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$;

LN7. $\lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$;

LN8. $D_{\ln} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$.

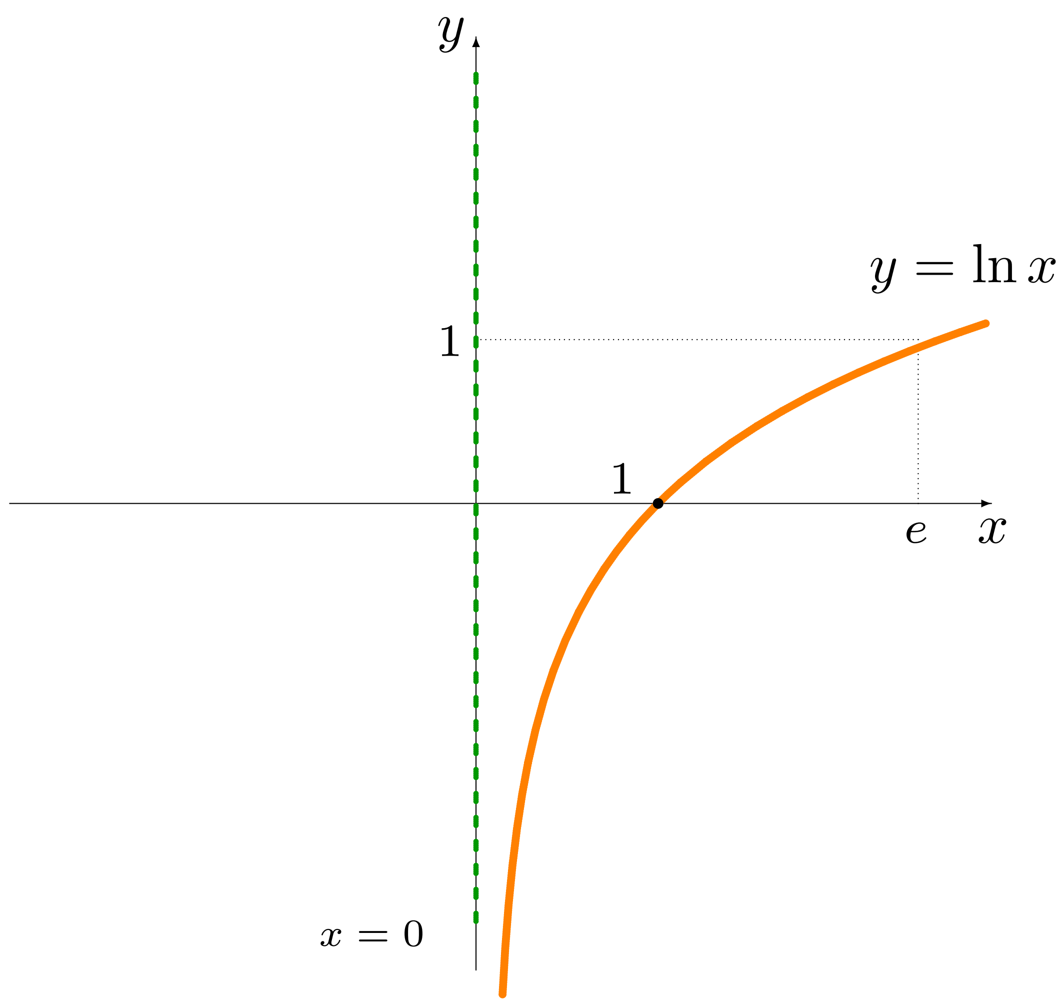
La dérivée du logarithme est facile à déterminer, à l'aide du théorème fondamental du calcul:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,, \quad \text{lorsque } x > 0.$$

Puisque $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, $\ln x \nearrow$ sur $D_{\ln}$. De plus, $\ln x$ est continue sur son domaine.

Conséquemment, la fonction $\ln \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective, c'est-à-dire que pour tout $k > 0$, l'équation $\ln x = k$ ne possède qu'une solution, qui dépend évidemment de k.

C'est ainsi qu'on défini e, l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. Remarquez que l'on construit alors $y = \ln x$ sans faire appel aux puissances irrationnelles.


y
$y = \ln x$
1
1
e
x
$x = 0$

La dérivée du logarithme

Selon la règle de dérivée en chaîne, la dérivée de $f(x) = \ln(g(x)) = h(g(x))$ est

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x).$$

Exemples: déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(x+2)$, $x+2>0$;
2. $g(x) = \ln(x^2+1)$;
3. $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$;
4. $m(x) = \ln(3x)$, $x>0$;
5. $j(x) = \ln(ax)$, $ax>0$;
6. $k(x) = x\ln x$, $x>0$.

Solutions: il suffit d'utiliser la formule de la dérivée d'un logarithme et les règles du chapitre 5.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x+2} \cdot (x+2)' = \dfrac{1}{x+2} \cdot 1 = \dfrac{1}{x+2}.$

2. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}.$

3. $$h'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = (x^2+1) \cdot \left(\frac{(1)'(x^2+1) - 1(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right)$$
$$= -\frac{2x}{x^2+1}.$$

4. $m'(x) = \dfrac{1}{3x} \cdot (3x)' = \dfrac{1}{3x} \cdot 3 = \dfrac{1}{x}.$

⚠ $(\ln x) = (\ln 3x)'$: cela ne devrait pas vous surprendre puisque

$$\ln(3x) = \ln 3 + \ln x.$$

En général, il est préférable de simplifier l'expression contenant des logarithmes *avant* de la dériver.

5. $j'(x) = \dfrac{1}{ax} \cdot (ax)' = \dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}$ tant et aussi longtemps que $ax > 0$.

6. $k'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1.$

Nous terminons cette section en illustrant une technique qui permet de dériver les fonctions algébriques sans utiliser les règles du produit et du quotient.

Exemple: pour dériver la fonction

$$y = f(x) = \frac{(x^2+2)^7(2x-21)^3}{\sqrt[4]{x^4+1}},$$

on remarque que

$$\begin{aligned} \ln y = \ln f(x) &= \ln\left(\frac{(x^2+2)^7(2x-21)^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right) \\ &= 7\ln(x^2+2) + 3\ln(2x-21) - \frac{1}{4}\ln(x^4+1), \quad 2x-21>0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[7\ln(x^2+2)+3\ln(2x-21)-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)\right]\\ = 7\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x+3\cdot\frac{1}{2x-21}\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+1}\cdot 4x^3\\ = \frac{14x}{x^2+2}+\frac{6}{2x-21}-\frac{x^3}{x^4+1},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y\cdot\left[\frac{14x}{x^2+2}+\frac{6}{2x-21}-\frac{x^3}{x^4+1}\right]\\ &= \frac{(x^2+2)^7(2x-21)^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\left[\frac{14x}{x^2+2}+\frac{6}{2x-21}-\frac{x^3}{x^4+1}\right].\end{aligned}$$

La primitive du logarithme

Lorsque $x > 0$, $\ln x + C$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ puisque

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Si $x < 0$, la fonction $y = \ln(-x)$ est bien définie et

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x + C, & \text{lorsque } x > 0 \\ \ln(-x) + C, & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}.$$

On simplifie en écrivant

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

⚠ **La valeur absolue est essentielle!**

Ceci nous permet d'intégrer un plus grande classe de fonctions algébriques.

Exemples: déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$;
2. $g(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, $x \neq \frac{1}{2}$;
3. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$;
4. $j(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Solutions: il suffit d'utiliser la formule et la méthode d'intégration par substitution.

1. $\displaystyle\int (x + 1/x)\, dx = \int x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$

2. Soit $u = 1 - 2x$. Alors $\frac{du}{dx} = -2$, d'où $-\frac{du}{2} = dx$. Ainsi

$$\int \frac{1}{1-2x}\, dx = \int \frac{1}{1-2x}\left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2x}\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\left(\ln|1-2x| + C\right) = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

3. Soit $u = x^2 + 1$. Alors $\frac{du}{dx} = 2x$, d'où $du = 2x\,dx$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\,dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\,du \\ &= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|x^2+1| + C.\end{aligned}$$

4. Soit $u = \ln x$. Alors $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, d'où $du = \frac{1}{x}dx$. Ainsi

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{du}{\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Il est toujours possible de vérifier si la réponse obtenue est la bonne en s'assurant que la fonction originale est la dérivée de la primitive obtenue.

On peut aussi calculer la primitive de $\ln x$ en intégrant par parties, mais il y a un truc! On commence par remarque que

$$\ln x = 1 \cdot \ln x.$$

On pose alors $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$. Ainsi $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$, d'où

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx = \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\ln x}_{f(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

9.2 – Les fonctions exponentielles

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le logarithme est une fonction bijective, alors

$$\ln y = x$$

admet une solution unique $y = \exp(x)$ (ou $y = e^x$).

Conséquemment,

$$\ln e^x = x \quad \text{et} \quad e^{\ln z} = z \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, z > 0.$$

La **fonction exponentielle** $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est la fonction définie par $\exp(x) = e^x$; c'est la réciproque du logarithme (népérien):

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Chaque propriété du logarithme a une analogue exponentielle.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

EX1. $e^0 = 1$;

EX2. $e^{x+y} = e^x e^y$;

EX3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;

EX4. $(e^x)^y = e^{xy}$;

EX5. $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$;

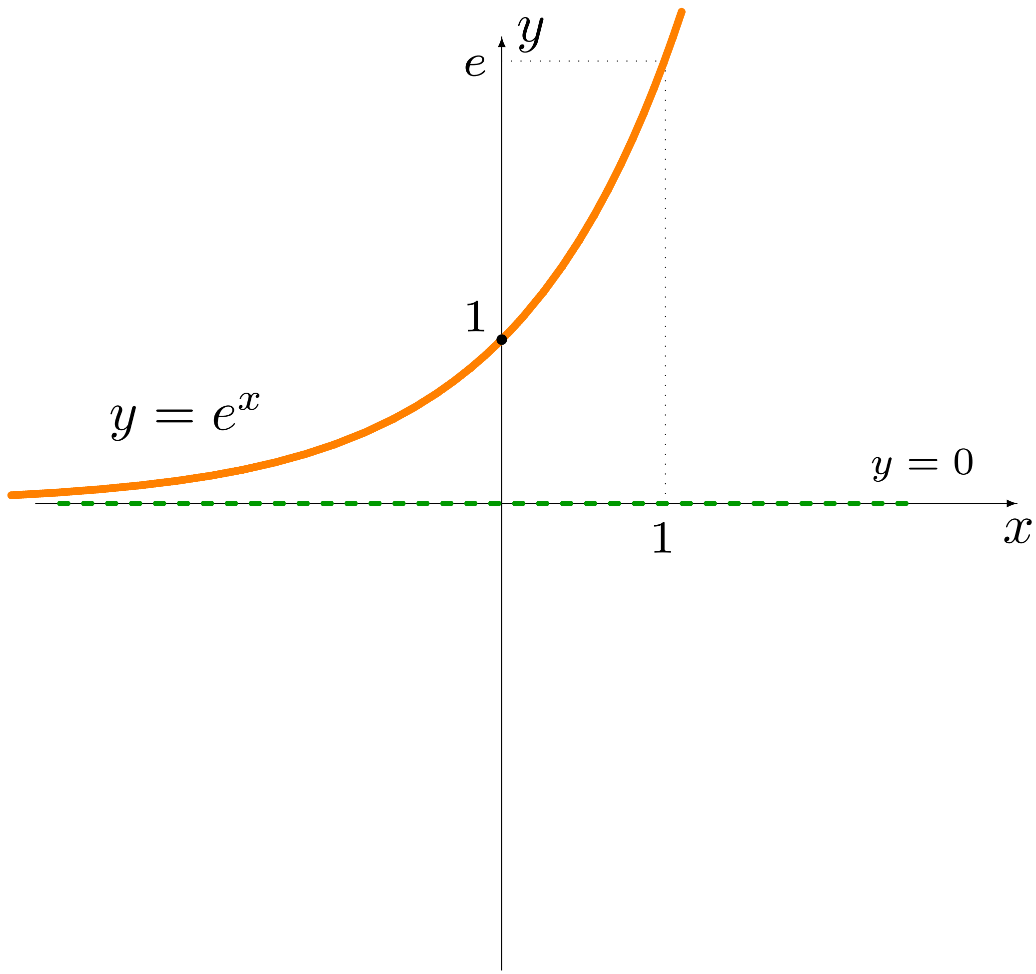
EX6. $D_{\exp} = \mathbb{R}$;

EX7. $\ln e^x = x$;

EX8. $e^{\ln x} = x$, pour tout $x > 0$;

EX9. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

EX10. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.


y
e
1
$y = e^x$
$y = 0$
1
x

On détermine la dérivée de l'exponentielle comme suit:

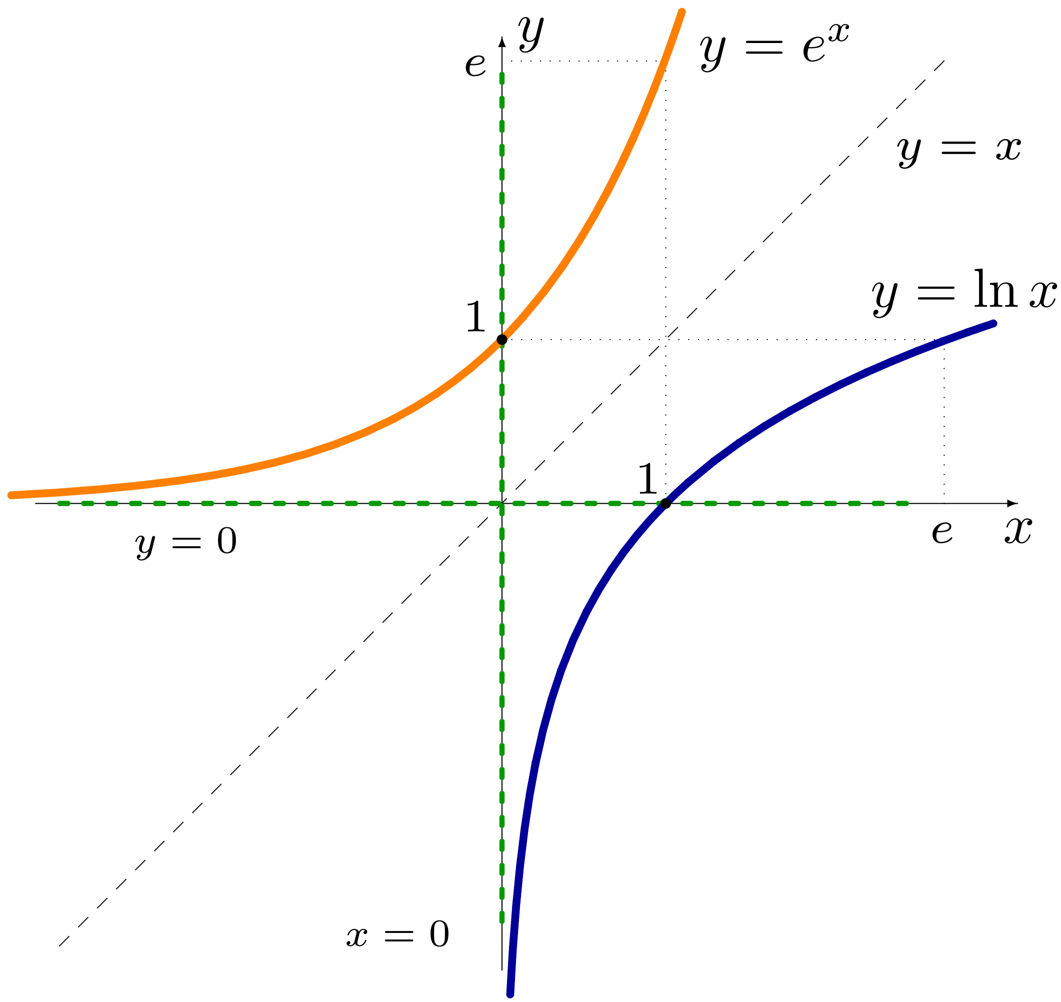
$$y = e^x \implies x = \ln y \implies \underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{=1} = \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = y = e^x.$$

L'exponentielle est la seule fonction qui est sa propre dérivée!

Puisque $(e^x)' = e^x > 0$ pour tout x, $e^x \nearrow$ sur $D_{\exp}$.

Par réciprocité (avec $\ln x$), elle est continue et son graphique est la réflexion du graphique de $y = \ln x$ par rapport à la droite $y = x$.

⚠ **Dans les exponentielles b^x, la variable se retrouve à l'exposant; le polynôme x^n, elle se retrouve à la base. Il faut distinguer ces cas!**



y
e
$y = e^x$
$y = x$
$y = \ln x$
1
1
$y = 0$
e
x
$x = 0$

La dérivée de l'exponentielle

Selon la règle de dérivée en chaîne, la dérivée de $f = e^{u(x)} = h(u(x))$ est

$$f'(x) = h'(u(x))u'(x) = e^{u(x)}u'(x).$$

Exemples: déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{x+2}$;
2. $g(x) = e^{-x^2+1}$;
3. $h(x) = xe^x$;
4. $j(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$;
5. $m(x) = e^{1/x}$.

Solutions: il suffit d'utiliser la formule de la dérivée d'une exponentielle et les règles du chapitre 5.

1. $f'(x) = e^{x+2} \cdot (x+2)' = e^{x+2} \cdot 1 = e^{x+2}$.

2. $g'(x) = e^{-x^2+1} \cdot (-x^2+1)' = e^{-x^2+1} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2+1}$.

3. $h'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x(1+x)$.

4. $j'(x) = e^{kx} \cdot (kx)' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

5. $m'(x) = e^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$.

Nous terminons cette section en illustrant une technique qui permet de dériver les fonctions **exponentielles générales** (où la variable se retrouve et à la base et à l'exposant, telles x^x ou $x^{1/x}$).

Exemple: pour dériver la fonction $y = f(x) = x^{1/x}$, définie pour tout $x > 0$, on prend le logarithme de l'expression des deux côtés:

$$\ln y = \ln\left(x^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\ln x,$$

et on dérive de part et d'autre par rapport à x:

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)'\ln x + \frac{1}{x}(\ln x)' = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

d'où $\frac{dy}{dx} = y \cdot \left[\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\right] = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1-\ln x)$.

La primitive de l'exponentielle

Puisque $(e^x + C)' = e^x + 0 = e^x$, l'exponentielle est sa propre primitive (à une constante près):

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

Soient $k, c \in \mathbb{R}$. En intégrant par substitution, on montre que

$$\int e^{kx+c} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx+c} + C.$$

En effet, posons $u = kx + c$. Alors $\frac{du}{dx} = k \implies \frac{1}{k} du = dx$ et

$$\int e^{kx+c} \, dx = \int e^{kx+c} \cdot \frac{1}{k} \, du = \frac{1}{k} \int e^u \, du = \frac{1}{k} e^u + C = \frac{1}{k} e^{kx+c} + C.$$

⚠ **En général, il n'y a pas de règle d'intégration pour les fonctions plus compliquées avec des exponentielles: on doit faire du cas par cas.**

Exemples: déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x + e^{x+2}$, $x \neq 0$;
2. $g(x) = 2xe^{x^2+1}$;
3. $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$;
4. $j(x) = xe^{-x}$.

Solutions: il suffit d'utiliser la formule et les techniques d'intégration appropriées.

1. $\displaystyle\int (x + e^{x+2})\, dx = \int x\, dx + \int e^{x+2}\, dx = \frac{x^2}{2} + e^{x+2} + C.$

2. Soit $u = x^2 + 1$. Alors $\frac{du}{dx} = 2x$, d'où $du = 2x\, dx$ et

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2+1}\, dx &= \int e^{x^2+1} \cdot 2x\, dx = \int e^{x^2+1}\, du \\ &= \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2+1} + C.\end{aligned}$$

3. Soit $u = e^x + 1$. Alors $\frac{du}{dx} = e^x$, d'où $du = e^x\,dx$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{e^x+1}\cdot e^x\,dx \\ &= \int \frac{1}{e^x+1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|e^x+1| + C.\end{aligned}$$

4. Posons $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Alors $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$, et

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\,dx &= \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C.\end{aligned}$$

⚠ **Il n'est pas toujours possible de trouver la primitive à l'aide de ces méthodes.**

Par exemple, la primitive de

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

qu'on utilise fréquemment en probabilités et en statistique, ne peut s'exprimer avec des fonctions algébriques, ou des fonctions logarithmiques, exponentielles (ou même trigonométriques).

Cela ne veut pas dire que la primitive n'existe pas, mais plutôt qu'il faut l'exprimer autrement, à l'aide du théorème fondamental du calcul:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad \text{(remarquez ce } -\infty\text{).}$$

9.3 – Applications

Les résultats et méthodes des chapitres précédents s'appliquent aussi aux exponentielles et au logarithmes.

Exemples: résoudre les équations suivantes.

1. $\log_{10} x = 2$;
2. $\ln(x-2) = 4$;
3. $(\ln x)^2 - \ln(x^2) = -1$;
4. $4^x = 9$;
5. $e^{-x} = 2$;
6. $e^x - e^{-x} = 2$.

Solution: on utilise les propriétés des exponentielles et des logarithmes.

1. Effectuons les opérations suivantes:

$$\log_{10} x = 2 \iff 10^{\log_{10} x} = 10^2 \iff x = 100.$$

2. Effectuons les opérations suivantes:

$$\ln(x-2) = 4 \iff e^{\ln(x-2)} = e^4 \iff x - 2 = e^4 \iff x = e^4 + 2.$$

3. Commençons par ré-écrire l'équation sous la forme

$$(\ln x)^2 - 2(\ln x) + 1 = 0.$$

Posons $y = \ln x$; alors $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 = 0 \implies y = 1$. Les solutions de l'équation initiale sont donc les solutions de $\ln x = 1$. Effectuons maintenant les opérations suivantes:

$$\ln x = 1 \iff e^{\ln x} = e^1 \iff x = e.$$

4. Effectuons les opérations suivantes:

$$4^x = 9 \iff \ln 4^x = \ln 9 \iff x \ln 4 = \ln 9 \iff x = \frac{\ln 9}{\ln 4}.$$

5. Effectuons les opérations suivantes:

$$e^{-x} = 2 \iff \ln e^{-x} = \ln 2 \iff -x \ln e = \ln 2 \iff -x \cdot 1 = \ln 2.$$

6. En multipliant de part et d'autre par e^x, nous obtenons l'équation

$$e^{2x} - 1 = 2e^x \quad \text{ou} \quad (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0.$$

Posons $y = e^x$. L'équation devient alors $y^2 - 2y - 1 = 0$, d'où

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Alors $e^x = 1 \pm \sqrt{2}$. Mais $e^x > 0$, alors $e^x \neq 1 - \sqrt{2}$. Il ne reste que $e^x = 1 + \sqrt{2}$. En prenant le logarithme de cette équation, nous obtenons

$$\ln e^x = \ln(1 + \sqrt{2}) \implies x = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Exemples: déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{-x} \ln x$;

2. $g(x) = e^{x^2+1} + \ln(x^2 + 1)$;

3. $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(\ln x)^3}$;

4. $j(x) = \sqrt{\ln x + x}$;

5. $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^{3x}}$;

6. $m(x) = \sqrt{e^x + x}$.

Solution: on utilise les règles des chapitres précédents.

1. $f'(x) = e^{-x}(\ln x)' + (e^{-x})' \ln x = e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + (-1)e^{-x} \cdot \ln x = e^{-x}(\frac{1}{x} - \ln x)$.

2. $g'(x) = \left(e^{x^2+1}\right)' + \left(\ln(x^2+1)\right)' = e^{x^2+1}(x^2+1)' + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'$
$= 2xe^{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = 2x\left(e^{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)$.

3. $h'(x) = \dfrac{(x^2+1)'(\ln x)^3 - (x^2+1)\left((\ln x)^3\right)'}{(\ln x)^6} = \dfrac{2x\ln^3 x - (x^2+1)3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^6 x}$
$= \dfrac{2x\ln^3 x - 3\frac{x^2+1}{x}\ln^2 x}{\ln^6 x} = \dfrac{2x\ln x - 3(x^2+1)\frac{1}{x}}{\ln^4 x}$.

4. $j'(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(x) + x\right)^{-1/2} \cdot (\ln x + x)' = \frac{1}{2}\left(\ln(x) + x\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{x} + 1\right).$

5. $k'(x) = \frac{(x^2+1)'e^{3x} - (x^2+1)\left(e^{3x}\right)'}{e^{6x}} = \frac{2xe^{3x} - (x^2+1)3e^{3x}}{e^{6x}}$
$= \frac{2x - 3(x^2+1)}{e^{3x}}.$

6. $m'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + x\right)^{-1/2}\left(e^x + 1\right).$

Exemples: déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = xe^{-x^2}$;

2. $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

3. $h(x) = x^2 e^x$;

4. $k(x) = x \ln x$, $x > 0$.

Solutions: on utilise les règles des chapitres précédents.

1. Soit $u = -x^2$. Alors $\frac{1}{-2x} du = dx$ et

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int xe^u\,\frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

2. Soit $u = e^x + e^{-x}$. Alors $\frac{1}{e^x - e^{-x}} du = dx$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{u}\,\frac{du}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C = \ln|e^x + e^{-x}| + C.\end{aligned}$$

3. Posons $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = x$, $g(x) = e^x$, et

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int x e^x \, dx$$

Cette nouvelle intégrale se calcule également par partie. Posons $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$, et

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C.$$

En combinant ces résultats, on obtient

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int x e^x \, dx = x^2 e^x - x e^x + e^x + C.$$

4. Posons $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = x$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$, et

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \\
&= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.
\end{aligned}$$

Exemples:

1. Trouver le maximum et le minimum de $f(x) = xe^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exemples:

1. Trouver le maximum et le minimum de $f(x) = xe^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

   Solution: on commence par trouver les points critiques de $f(x)$:

$$f'(x) = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot \left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x} = 0$$

$\Longrightarrow\ x = 1$ ($e^{-x} > 0$ pour tout x). Il y a donc trois points à considérer.

x	0	1	3
$f(x)$	0	$e^{-1} \approx 0.37$	$3e^{-3} \approx 0.15$

Alors, sur l'intervalle $[0, 3]$, $f(x)$ atteint son minimum (0) en $x = 0$ et son maximum (≈ 0.37) en $x = 1$.

2. Optimiser la fonction $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur l'intervalle $[-2, -1]$.

2. Optimiser la fonction $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur l'intervalle $[-2,-1]$.

Solution: on commence par trouver les points critiques de $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)' = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \implies x = 0 \notin [-2,-1].$$

Il n'y a donc que deux points à considérer (les extrémités).

x	-2	-1
$g(x)$	$\ln 5 \approx 1.61$	$\ln 2 \approx 0.70$

Alors, sur l'intervalle $[-2,-1]$, $g(x)$ atteint son minimum $(\ln 2)$ en $x=-1$ et son maximum $(\ln 5)$ en $x=-2$.

Exemples:

1. Esquisser le graphique de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Exemples:

1. Esquisser le graphique de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

   Solution: on utilise la marche à suivre.

   1. La fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ n'est pas définie lorsque $x^2 + 1 \leq 0$, ce qui n'est jamais le cas puisque $x^2 + 1 > 0$ pour tout x:

   $$D_f =]-\infty, +\infty[.$$

   2. La fonction n'a pas d'A.V. puisque $D_f = \mathbb{R}$.

   3. Lorsque $x \to \pm\infty$, $x^2 + 1 \to +\infty$. Par continuité du logarithme,

   $$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = \lim_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty \implies \text{ pas d'A.H.}$$

4. La fonction a des zéros là où

$$x^2 + 1 = 1 \implies x = 0 \implies Z_f = \{0\}.$$

L'ordonné à l'origine est obtenue en substituant $x = 0$ dans $f(x)$:

$$f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln 1 = 0 \implies O_f = \{0\}.$$

Le point $(0, 0)$ est donc sur le graphique.

5. La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

La fonction n'a qu'un point critique, en $x = 0$, puisque le numérateur de $f'(0)$ n'est nul qu'à cet endroit. Le dénominateur de $f'(x)$ n'est jamais nul puisque $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

6. La seconde dérivée de la fonction est

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Le numérateur de $f''(x)$ est nul lorsque $x = -1$ et $x = 1$. Le dénominateur de $f''(x)$ n'est jamais nul puisque $(x^2+1)^2 \geq 1 > 0$.

7. Les points de la partition de $\mathbb{R}$ sont alors -1, 0 et 1.

8. Le comportement de la courbe est donné par le tableau suivant:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$							

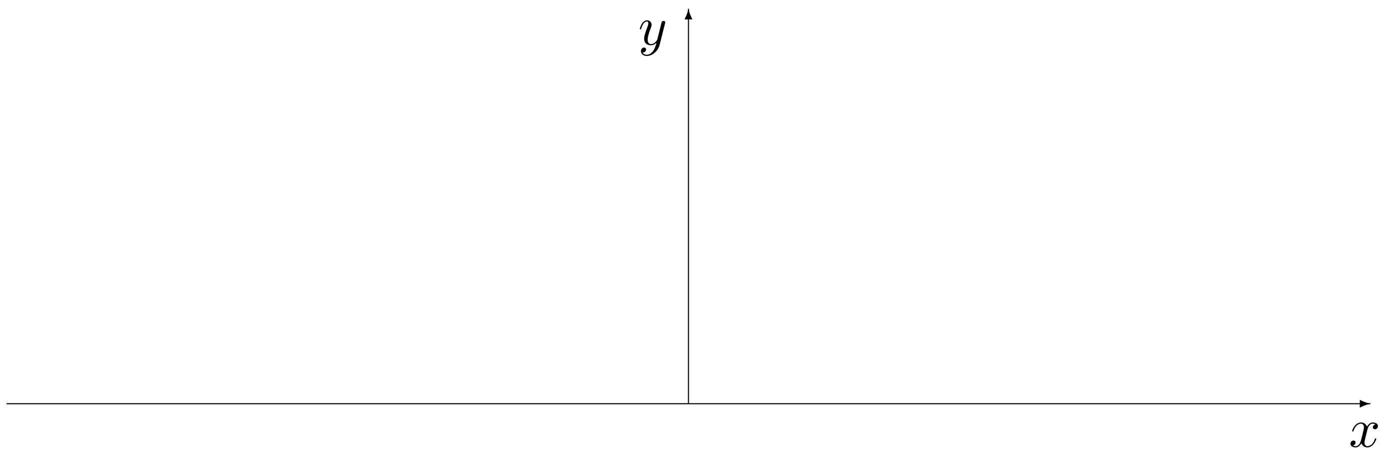
7. Les points de la partition de $\mathbb{R}$ sont alors -1, 0 et 1.

8. Le comportement de la courbe est donné par le tableau suivant:

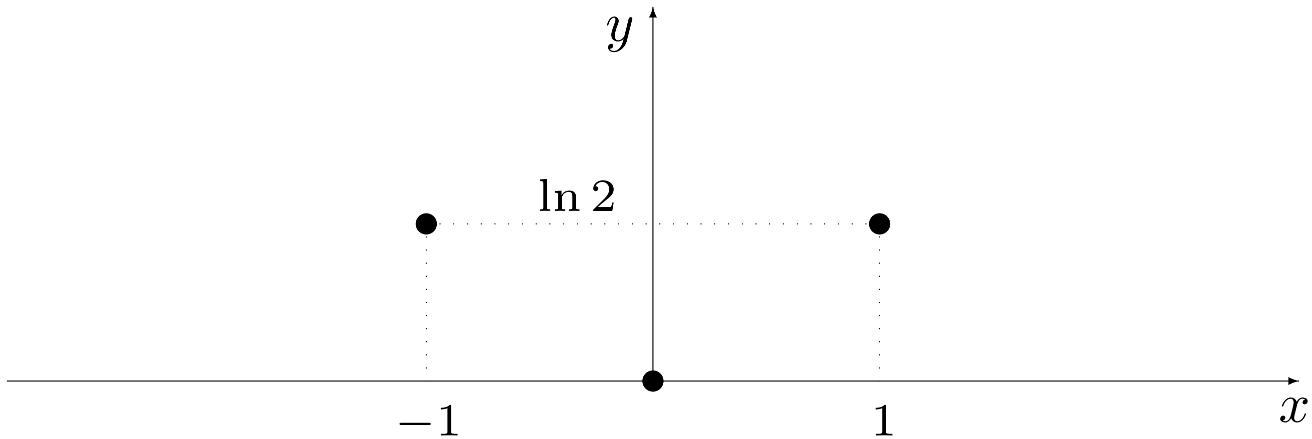
	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$		INF		MIN		INF	

9. La fonction a un minimum en $(0, 0)$ et des points d'inflexion en $(-1, \ln 2)$ et $(1, \ln 2)$.

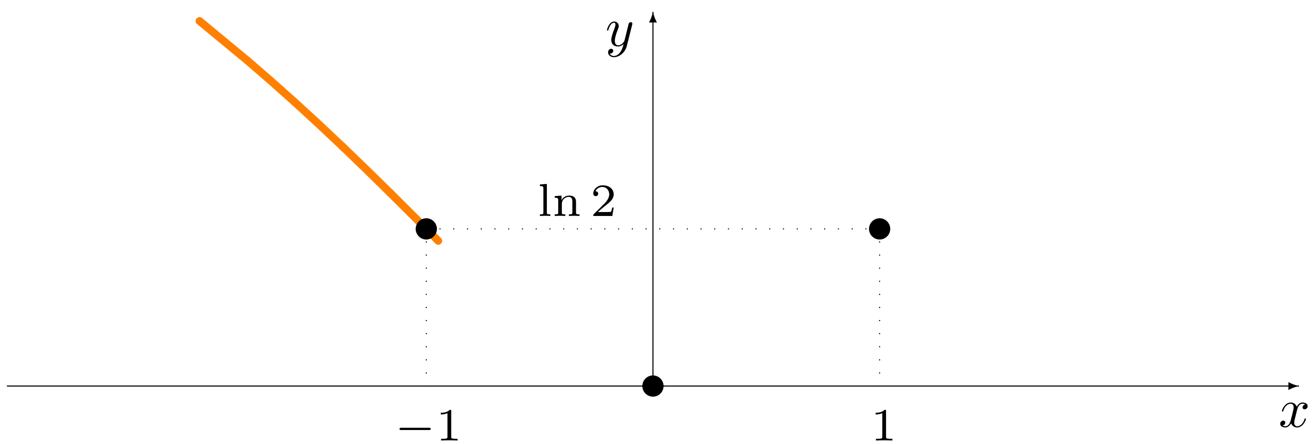
10. On peut maintenant tracer le graphique.



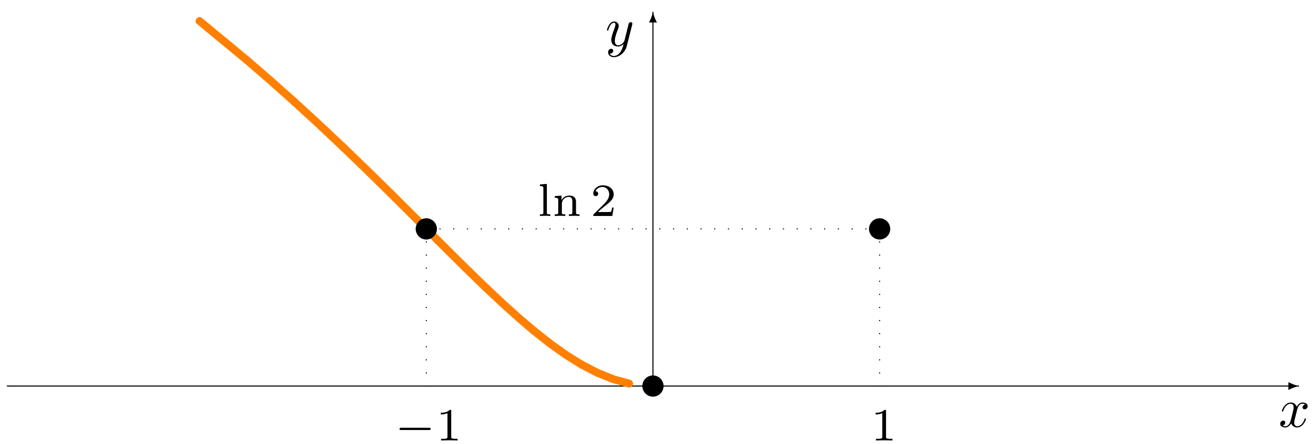
Note: lorsque $x \to \pm\infty$, $\ln(x^2 + 1) \approx \ln x^2 = 2 \ln |x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2 \ln |x|$.



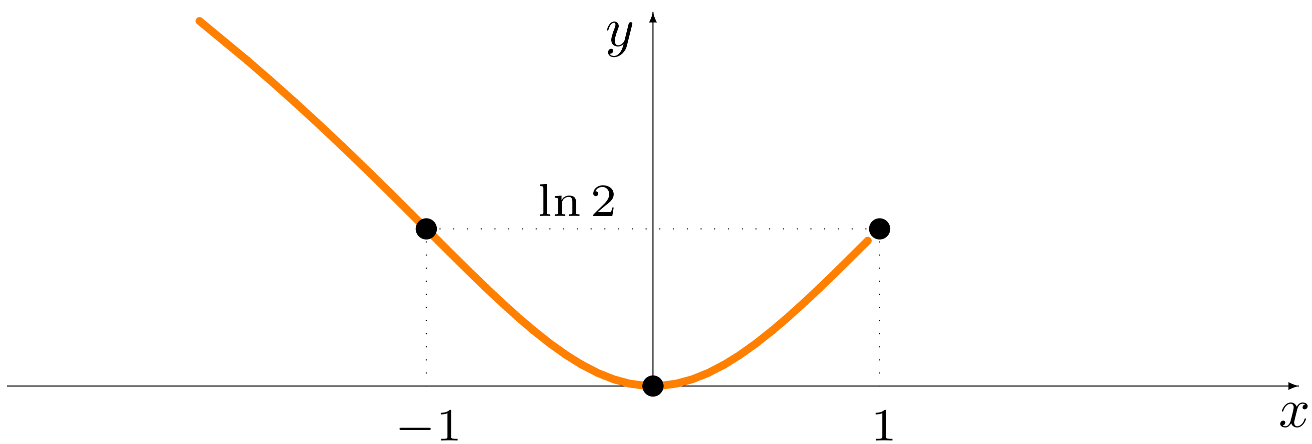
Note: lorsque $x \to \pm\infty$, $\ln(x^2+1) \approx \ln x^2 = 2\ln|x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2\ln|x|$.



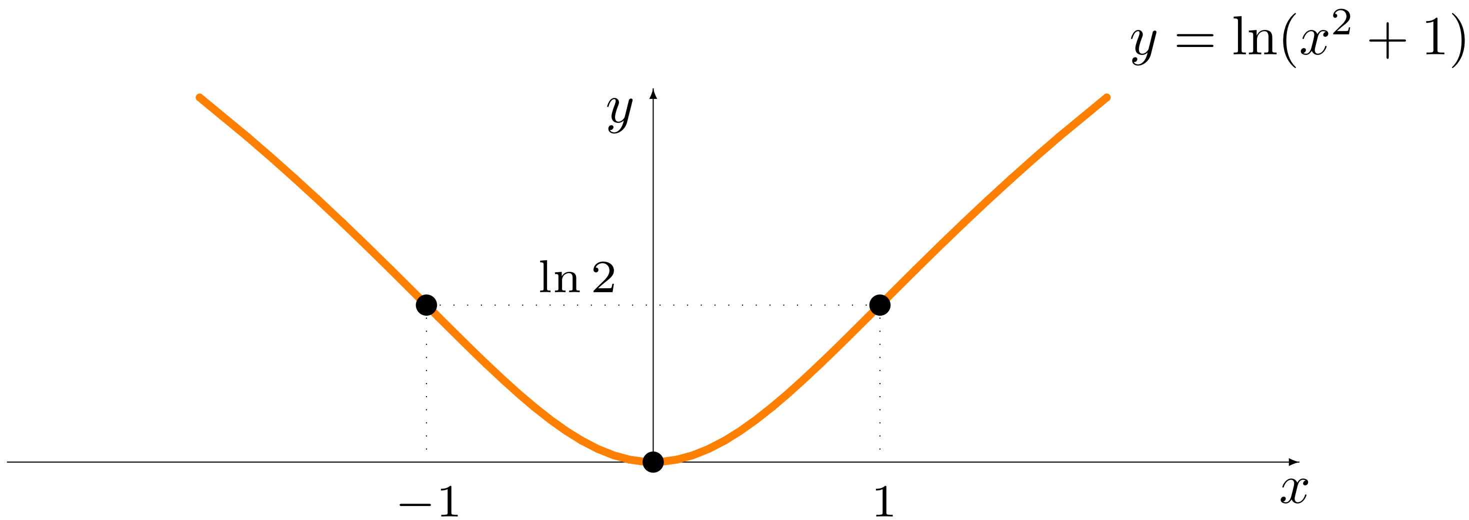
Note: lorsque $x \to \pm\infty$, $\ln(x^2+1) \approx \ln x^2 = 2\ln|x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2\ln|x|$.



Note: lorsque $x \to \pm\infty$, $\ln(x^2 + 1) \approx \ln x^2 = 2 \ln |x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2 \ln |x|$.



Note: lorsque $x \to \pm\infty$, $\ln(x^2+1) \approx \ln x^2 = 2\ln|x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2\ln|x|$.



Note: lorsque $x \to \pm+\infty$, $\ln(x^2+1) \approx \ln x^2 = 2\ln|x|$. Aux extrémités, le graphe devrait ressembler à $y = 2\ln|x|$.

2. Esquisser le graphique de la fonction définie par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Esquisser le graphique de la fonction définie par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solution: on utilise la marche à suivre.

1. La fonction $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est toujours définie:

$$D_g =]-\infty, +\infty[.$$

2. La fonction n'a pas d'A.V. puisque $D_g = \mathbb{R}$.

3. Lorsque $x \to \pm\infty$, $u = -\frac{x^2}{2} \to -\infty$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0^+ \implies \text{ A.H. en } y = 0.$$

4. La fonction n'a pas de zéro puisque $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ pour tout $x \in D_g$:

$$Z_g = \varnothing.$$

L'ordonné à l'origine est obtenue en substituant $x = 0$ dans $g(x)$:

$$g(0) = e^{-\frac{0^2}{2}} = e^0 = 1 \implies O_g = \{1\}.$$

Le point $(0, 1)$ est donc sur le graphique.

5. La dérivée de la fonction est

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La fonction n'a qu'un point critique, en $x = 0$, puisque c'est le seul endroit où $g'(x) = 0$. Il n'y a pas de point où $g'(x)$ n'est pas défini.

6. La seconde dérivée de la fonction est

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-x)'e^{-\frac{x^2}{2}} - x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) \\ &= (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (x-1)(x+1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

qui est nulle lorsque $x = -1$ et $x = 1$, et définie pour tout $x \in D_g$.

7. Les points de la partition de $\mathbb{R}$ sont donc -1, 0 et 1.

8. Le comportement de la courbe est donc donné par le tableau suivant:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$							

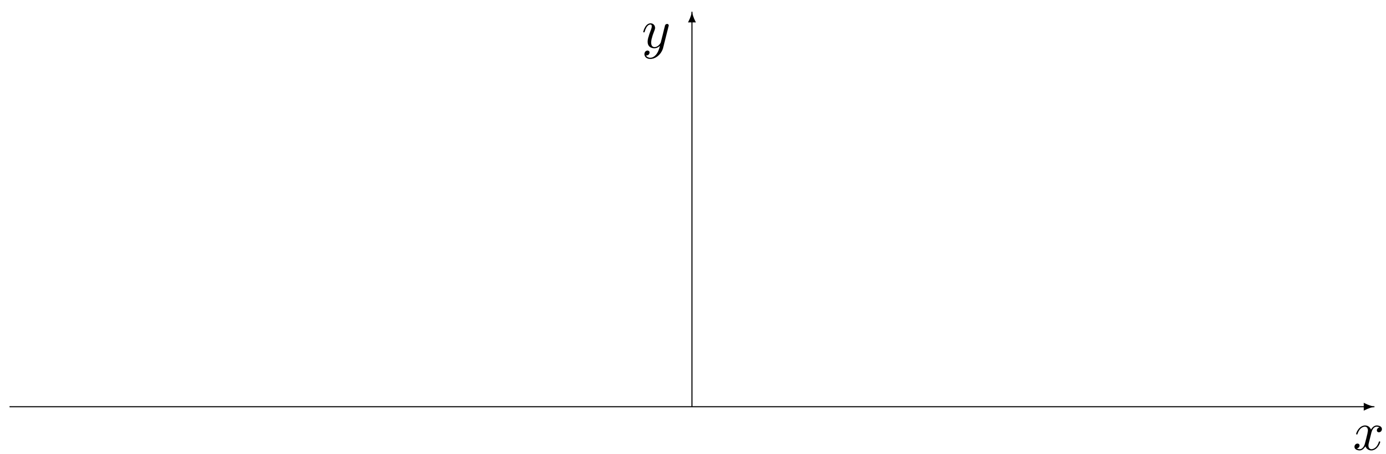
7. Les points de la partition de $\mathbb{R}$ sont donc -1, 0 et 1.

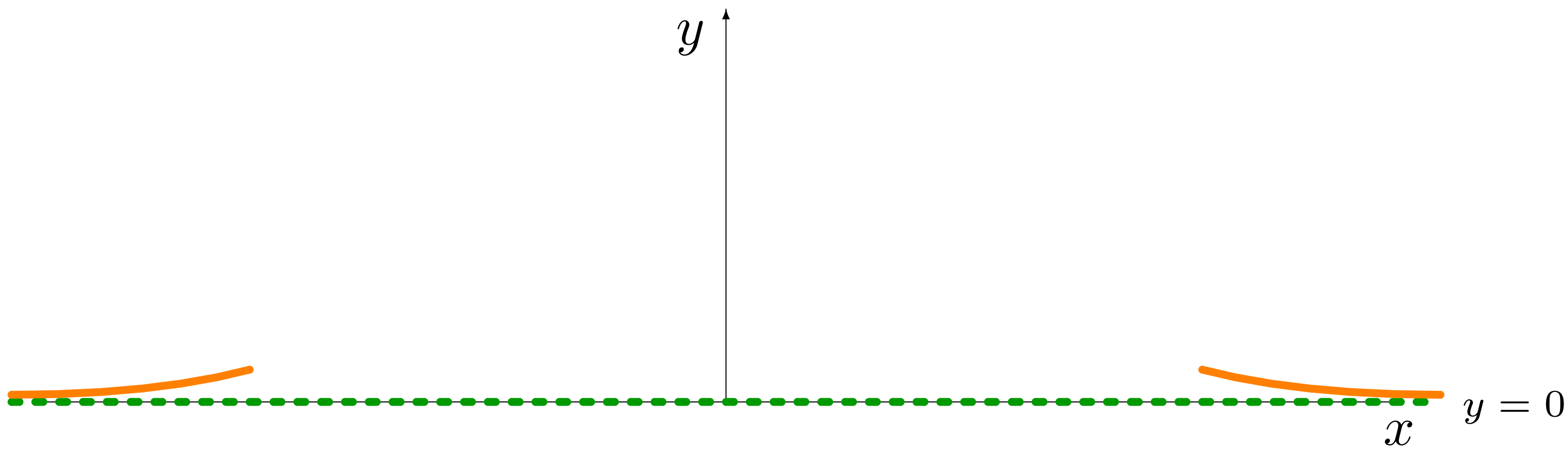
8. Le comportement de la courbe est donc donné par le tableau suivant:

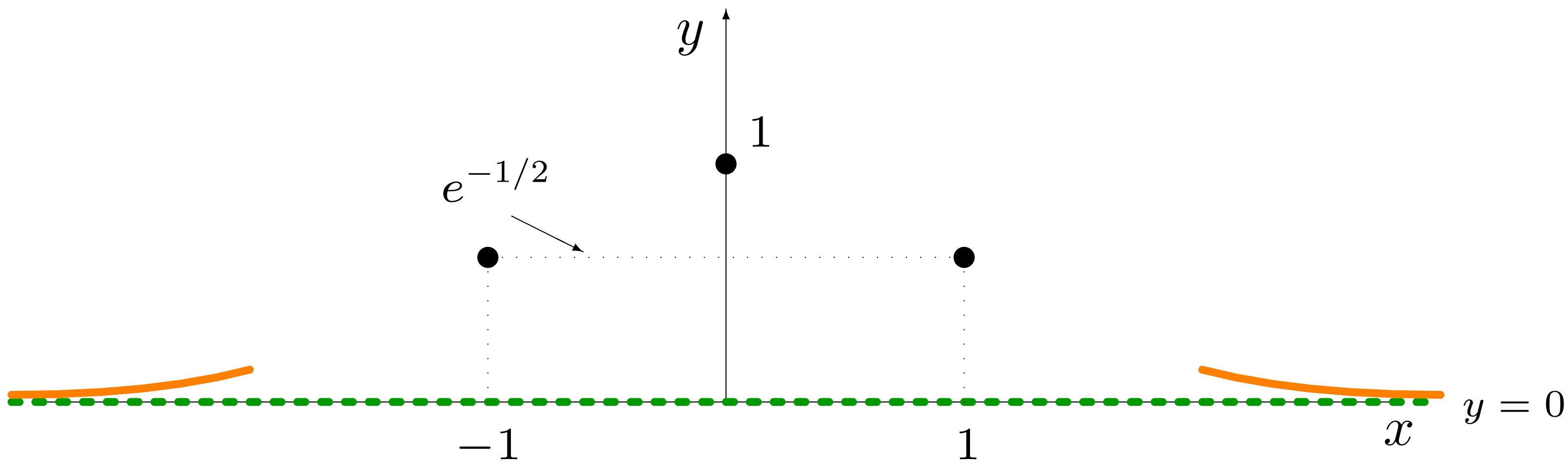
	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$		INF		MAX		INF	

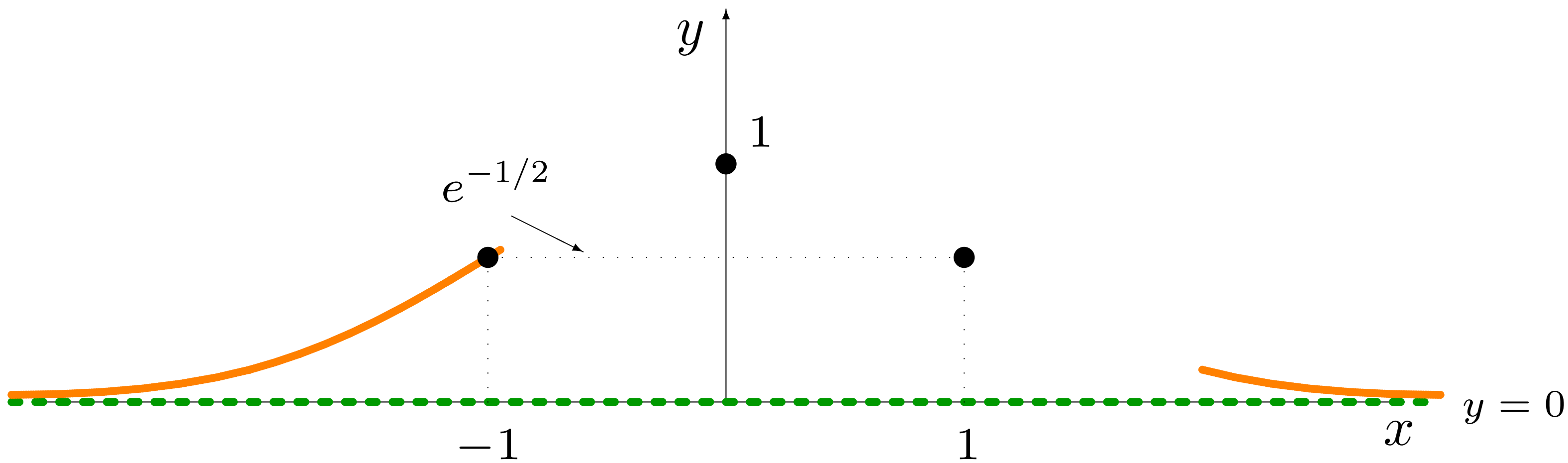
9. La fonction a un maximum en $(0, 1)$ et des points d'inflexion en $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ et $(1, e^{-\frac{1}{2}})$.

10. On peut maintenant tracer le graphique.

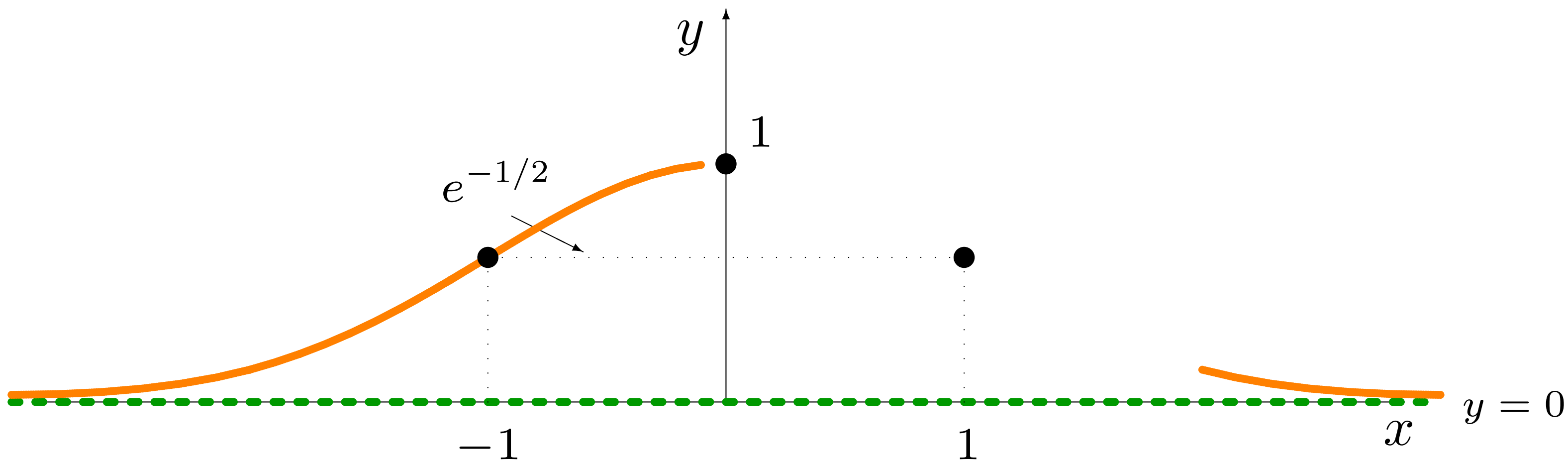

y
x


y
x
$y = 0$

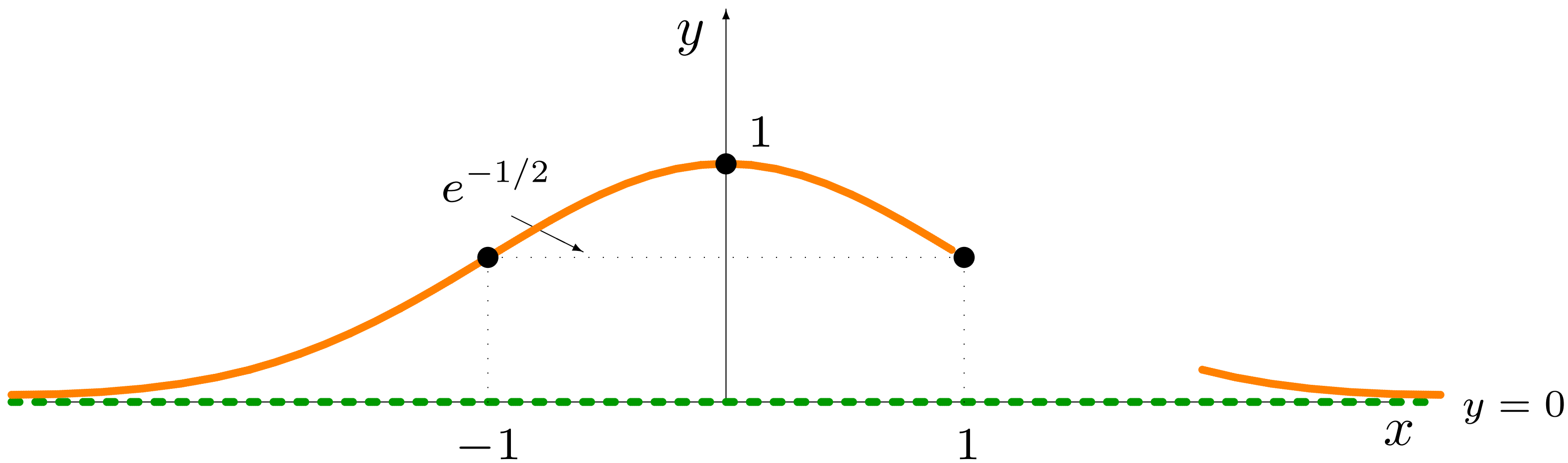

y
1
$e^{-1/2}$
-1
1
x
$y = 0$

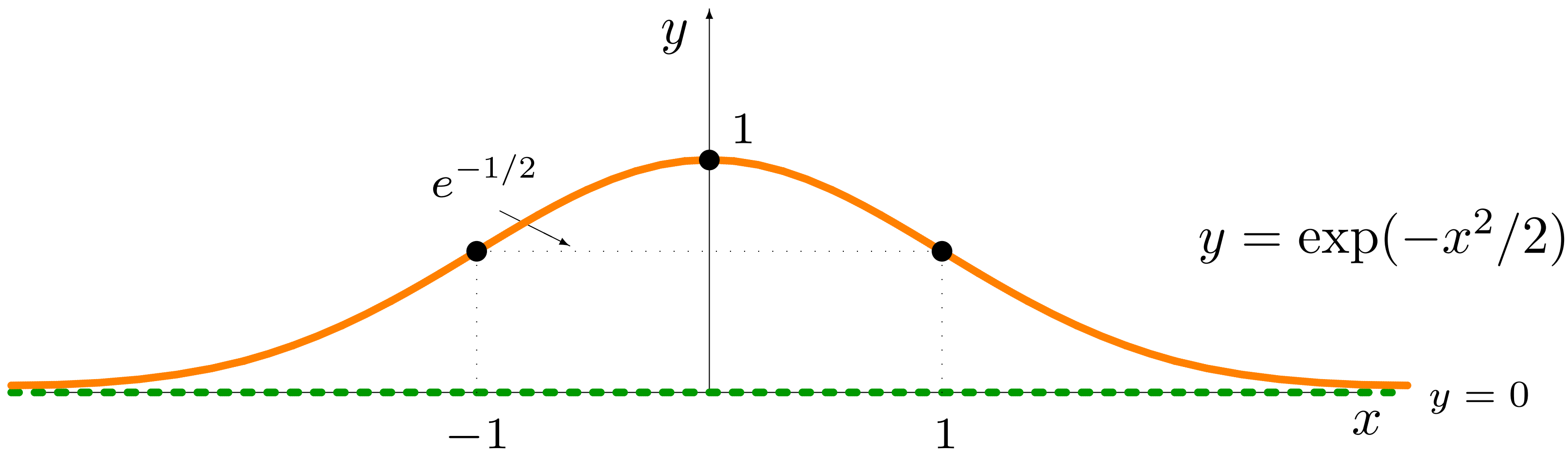


y
1
$e^{-1/2}$
-1
1
x
$y = 0$



y
1
$e^{-1/2}$
-1
1
x
$y = 0$


y
1
$e^{-1/2}$
-1
1
x
$y = 0$


y
1
$e^{-1/2}$
$y = \exp(-x^2/2)$
$y = 0$
x
-1
1

Exemple: déterminer les surplus du producteur et du consommateur si l'offre et la demande d'un article sont, respectivemment,

$$S(q) = 5e^{q} \quad \text{et} \quad D(q) = 20e^{-q}.$$

Exemple: déterminer les surplus du producteur et du consommateur si l'offre et la demande d'un article sont, respectivemment,

$$S(q) = 5e^q \quad \text{et} \quad D(q) = 20e^{-q}.$$

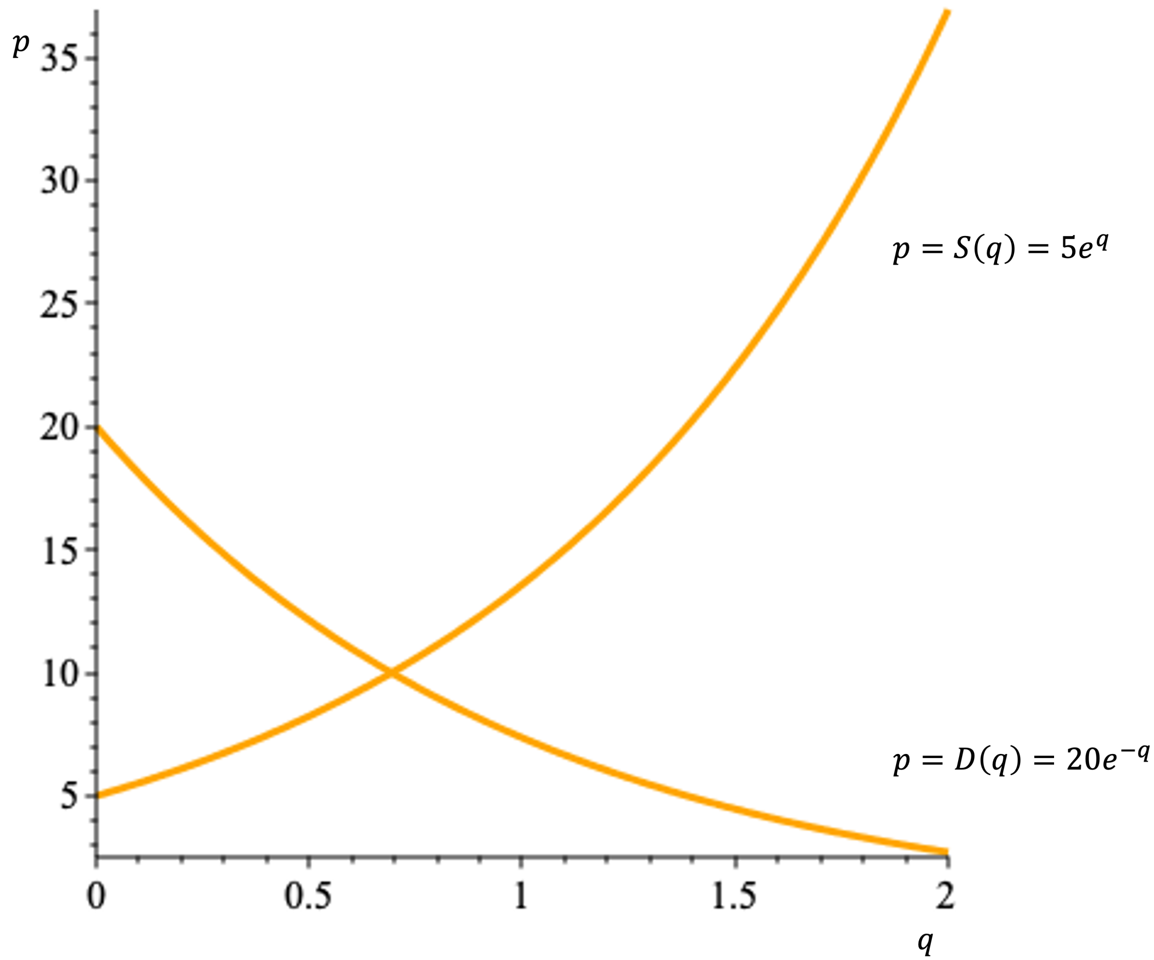
Solution: on commence par trouver le point d'équilibre (q^*, p^*):

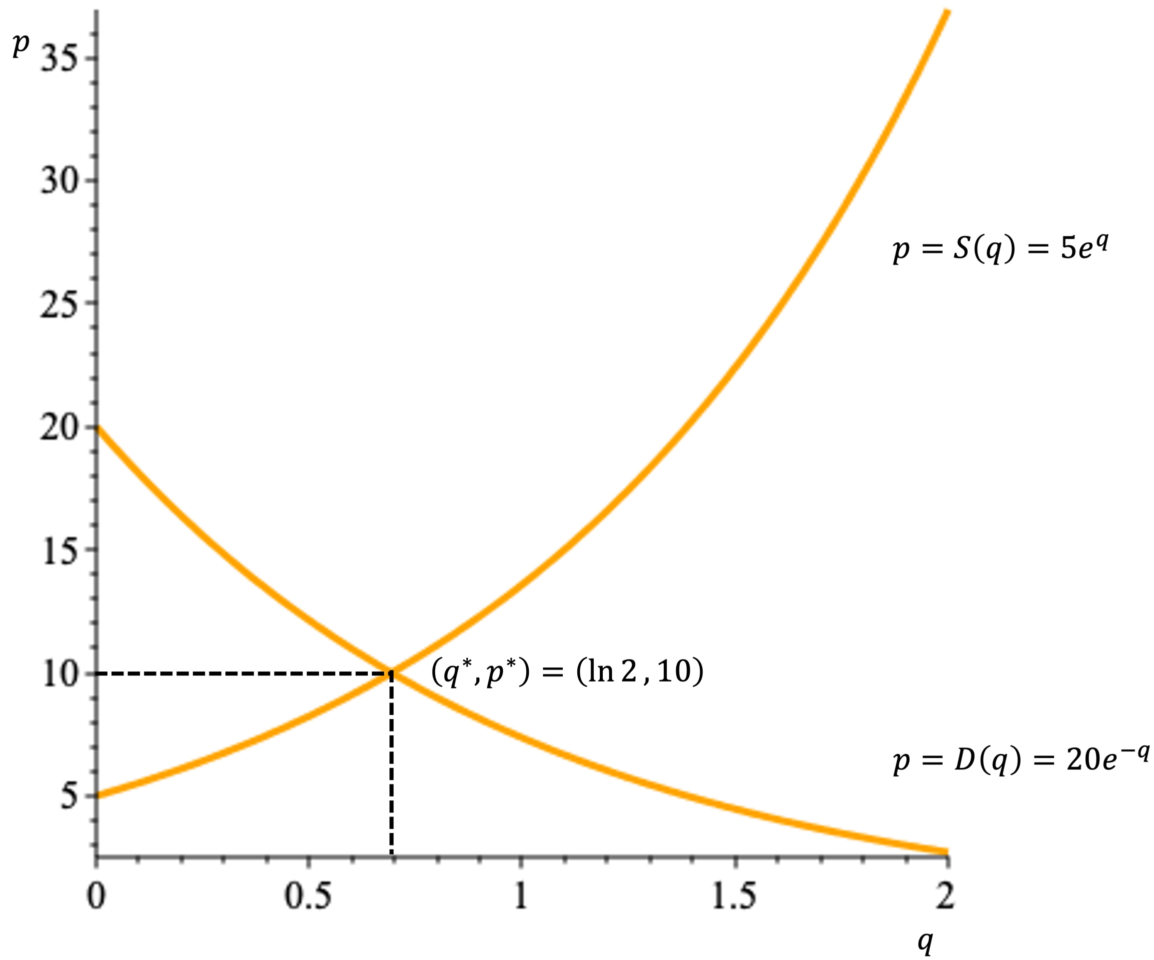
$$\begin{aligned} 5e^q = 20e^{-q} &\iff e^{2q} = 4 = 2^2 \iff \ln e^{2q} = \ln 2^2 \\ &\iff 2q = 2\ln 2 \quad \iff q^* = \ln 2, \end{aligned}$$

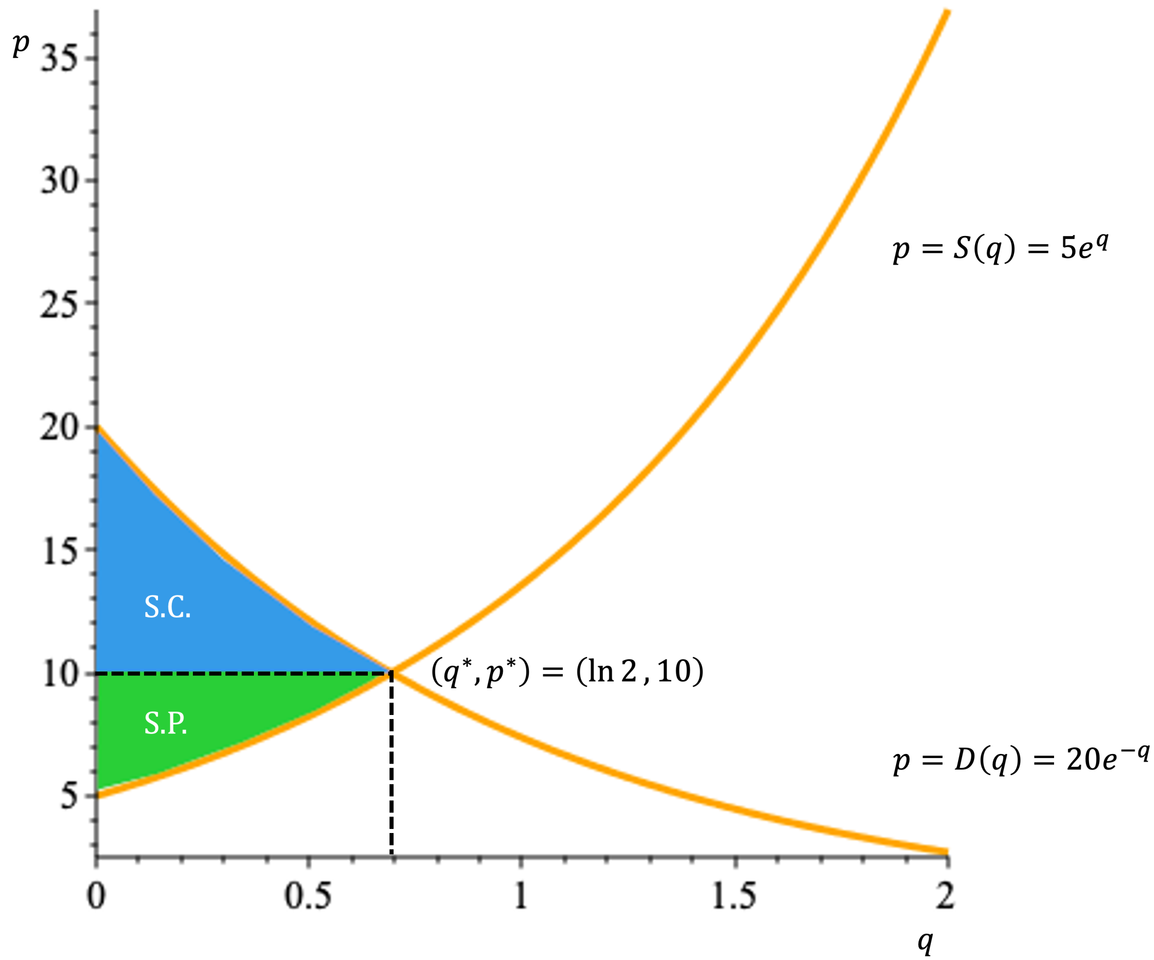
d'où

$$p^* = S(q^*) = 5e^{\ln 2} = 10$$

est le prix d'équilibre.


p
35
30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
q
$p = S(q) = 5e^q$
$p = D(q) = 20e^{-q}$


p
35
30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
q
$p = S(q) = 5e^q$
$(q^*, p^*) = (\ln 2, 10)$
$p = D(q) = 20e^{-q}$


p
35
30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
q
S.C.
S.P.
$(q^*, p^*) = (\ln 2, 10)$
$p = S(q) = 5e^q$
$p = D(q) = 20e^{-q}$

Selon les formules du chapitre 8, les surplus recherchés sont alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S.\,C.} &= \int_0^{q^*} (D(q) - p^*)\ dq = \int_0^{\ln 2} 20e^{-q}\, dq - 10\ln 2 \\
&= 20\big[-e^{-q}\big]_0^{\ln 2} - 10\ln 2 = 20\left(-e^{-\ln 2} + e^0\right) - 10\ln 2 \\
&= 20\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - 10\ln 2 = 10(1 - \ln 2), \\
\mathrm{S.\,P.} &= \int_0^{q^*} (p^* - S(q))\ dq = 10\ln 2 - \int_0^{q^*} 5e^q\, dq \\
&= 10\ln 2 - 5\big[e^q\big]_0^{\ln 2} = 10\ln 2 - 5\left(e^{\ln 2} - e^0\right) \\
&= 10\ln 2 - 5(2 - 1) = 10\ln 2 - 5 = 5(2\ln 2 - 1).
\end{aligned}$$

La valeur capitalisée et la valeur actualisée

Au chapitre 1, nous avons discuté de la valeur capitalisée et de la valeur actualisée d'une série de paiements constants, versés à intervalle régulier.

En général, les revenus des entreprises varient avec le temps. À Ottawa, par exemple, les revenus de vente de “beavertails” sont plus élevés en hiver.

Si une entreprise dépose continuement ses revenus (constants ou non) dans un compte en banque où l'intérêt est composé continuellement à un taux de $r\%$ pendant T années:

- la **valeur capitalisée** est le solde du compte à échéance, tandis que
- la **valeur actualisée** est la somme totale qu'il faudrait déposer initialement afin d'obtenir ce montant.

Soit $B(t)$ le taux annuel auquel l'entreprise effectue ses dépôts. Ces valeurs sont exprimées par

$$\mathrm{V.\,C.} = \int_0^T B(t)e^{r(T-t)}\,dt$$
$$\mathrm{V.\,A.} = \int_0^T B(t)e^{-rt}\,dt.$$

Exemple: déterminer la valeur capitalisée et la valeur actualisée d'un revenu constant et continu de $18,000\$$ par année pendant 4 ans, en supposant que le taux d'intérêt de 6% est composé continuellement.

Solution: en utilisant les formules, on obtient:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V.\,C.} &= \int_0^4 18{,}000 e^{0.06(4-t)}\,dt \\
&= 18{,}000 \int_0^4 e^{-0.06t+0.24}\,dt = 18{,}000 \left[\frac{e^{-0.06t+0.24}}{-0.06}\right]_0^4 \\
&= -\frac{18{,}000}{0.06}\left[1 - e^{0.24}\right] \approx 81{,}374.75\$ \\
\mathrm{V.\,A.} &= \int_0^4 18{,}000 e^{-0.06t}\,dt = 18{,}000 \int_0^4 e^{-0.06t}\,dt = 18{,}000 \left[\frac{e^{-0.06t}}{-0.06}\right]_0^4 \\
&= -\frac{18{,}000}{0.06}\left[e^{-0.24} - 1\right] \approx 64{,}011.64\$.
\end{aligned}
$$

Ainsi, il aurait fallu déposer $\approx 64.011.64$ à $t = 0$ avec un taux d'intérêt de 6% afin d'obtenir une valeur capitalisée de $\approx 81,374.75$ après 4 ans.

9.4 – Les intégrales impropres

L'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$.

⚠ **Selon notre définition, ce concept n'a de sens que lorsque f est bornée (et continue) et lorsque l'intervalle d'intégration $[a, b]$ est fini.**

On peut cependant généraliser afin de calculer l'aire d'une région planaire qui n'est pas bornée:

- soit parce que la fonction n'est pas bornée sur $[a, b]$,
- soit parce que l'intervlle n'est pas borné.

L'intégrale impropre du premier type

Soit $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, \infty)$:

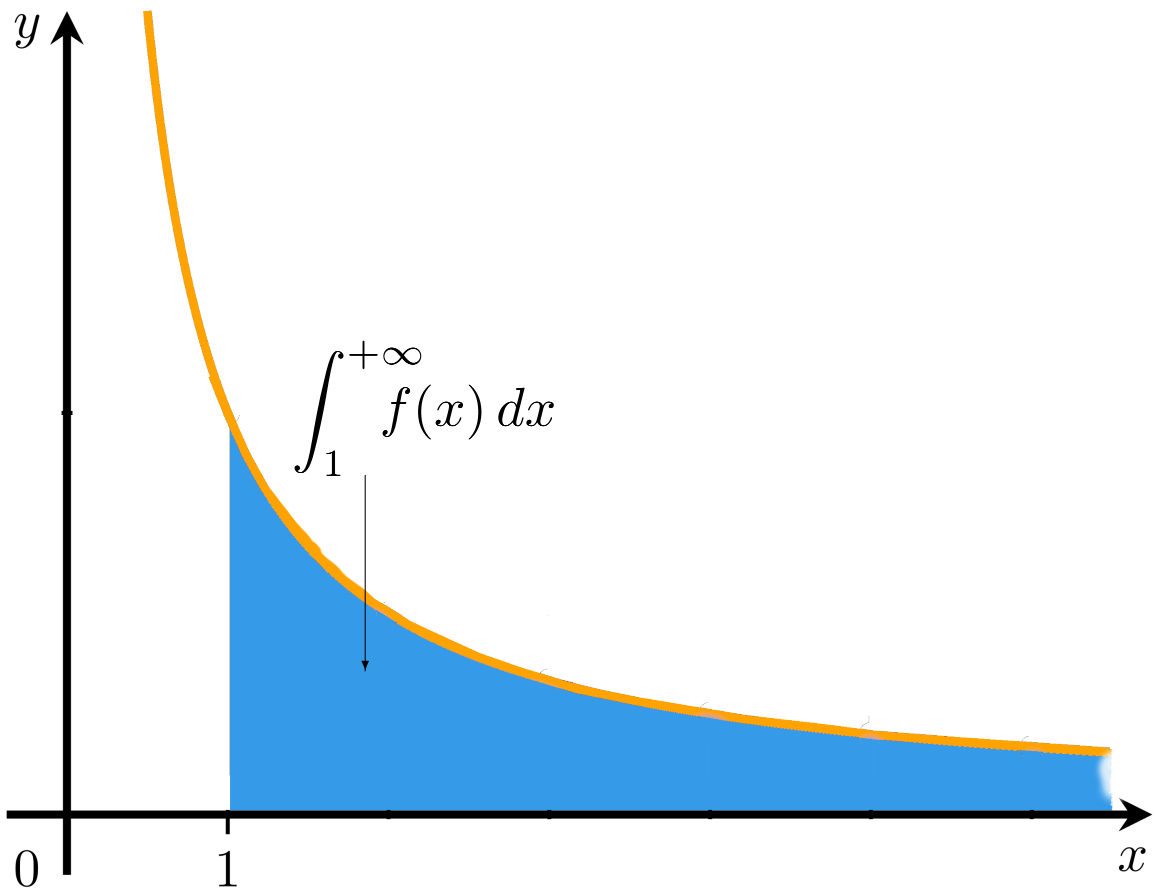
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

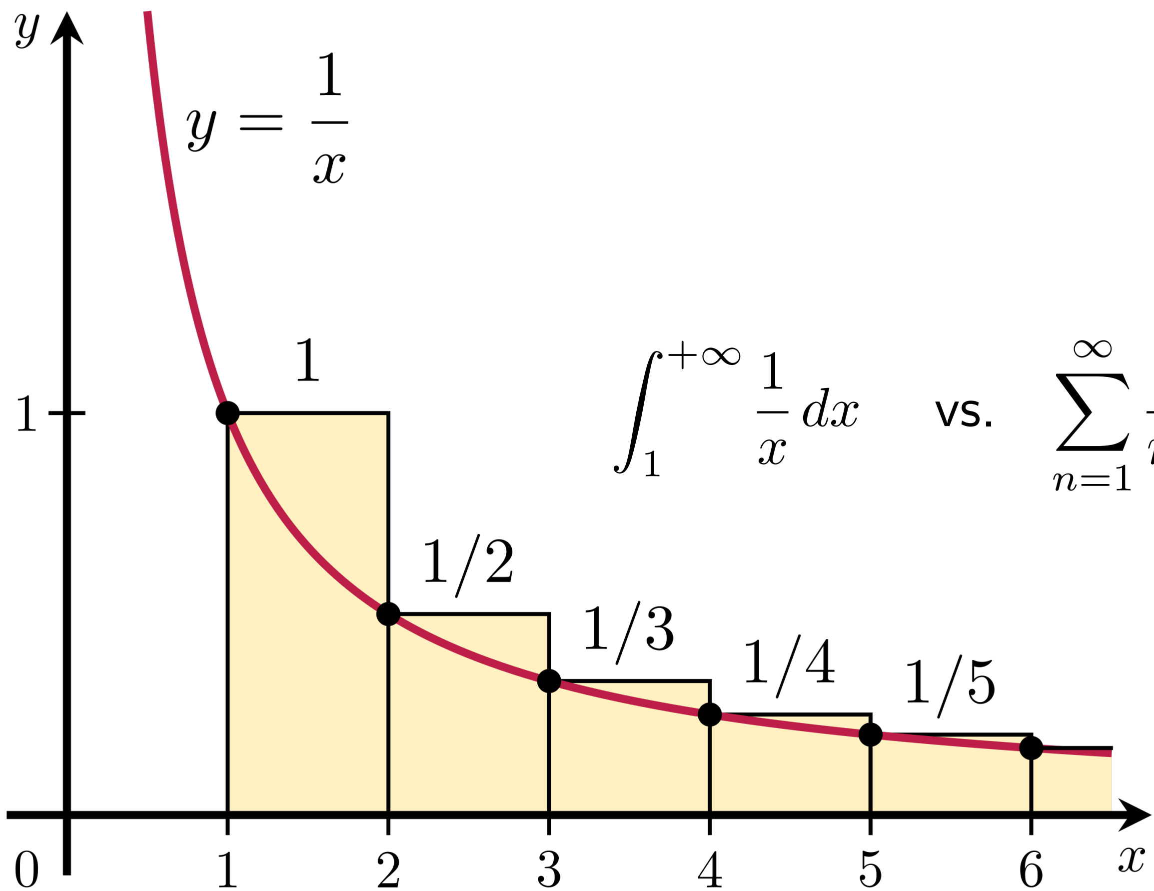
est une **intégrale impropre du premier type** (ou sur $(-\infty, a]$).

Il y a un lien avec les séries; on peut s'imaginer qu'une série est l'intégrale d'une fonction continue par paliers:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leftrightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Si la limite existe, l'intégrale impropre **converge**, sinon elle **diverge**.


y
$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$
0
1
x



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{vs.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Exemples: déterminer la convergence des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx;$

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx;$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^{-kx}\,dx,\ k \neq 0;$

4. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx;$

5. $\displaystyle\int_4^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}\right)\,dx.$

Solutions: il suffit de vérifier si les limites correspondantes existent.

1. Elle converge puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right]$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b}\right) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

2. Elle diverge puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \big[\ln|x|\big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \big[\ln|b| - \ln|1|\big]$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \big[\ln|b|\big] = +\infty.$$

3. Cela dépend du signe de k:

$$\int_{-\infty}^{a} e^{-kx}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} e^{-kx}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_b^a = \lim_{b\to-\infty}\left[\frac{e^{-ka}}{-k} - \frac{e^{-kb}}{-k}\right]$$

$$= -\frac{e^{-ka}}{k} + \frac{1}{k}\lim_{b\to-\infty}\left(e^{-kb}\right) = \begin{cases} -\frac{e^{-ka}}{k}, & k<0 \\ +\infty, & k>0 \end{cases}$$

L'intégrale diverge lorsque $k>0$ et converge lorsque $k<0$.

⚠ **On se sert ici de relations semblables à**

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0.$$

4. En intégrant par parties, on voit qu'elle converge puisque

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[\left[xe^{-x}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x}\,dx\right] \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[be^{-b} - 0 + \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^b\right] \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[be^{-b} - e^{-b} + 1\right] \\
&= 0 - 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

5. Elle converge puisque

$$
\begin{aligned}
\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}\right) dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_4^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln|x| - \ln|x-2| \Big]_4^b \qquad \left\{ \text{⚠} : \infty - \infty \right\} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| \right]_4^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{b}{b-2}\right| - \ln\left|\frac{4}{4-2}\right| \right] \\
&= \ln|1| - \ln|2| = -\ln 2.
\end{aligned}
$$

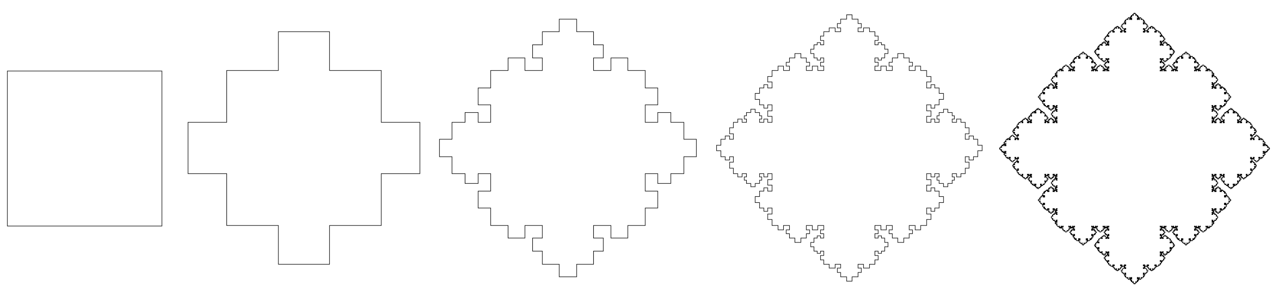
Lorsque l'intervalle d'intégration est infini, la région bornée par la courbe $y = f(x)$ et l'axe des x entre a et ∞ n'est pas bornée.

Si l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

converge, la superficie de cette région est quand même finie.

⚠ **Il est possible qu'une figure mathématique aie un périmètre infini et une superficie finie!**



L'intégrale impropre du second type

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui n'est pas définie en $x = a$. L'expression

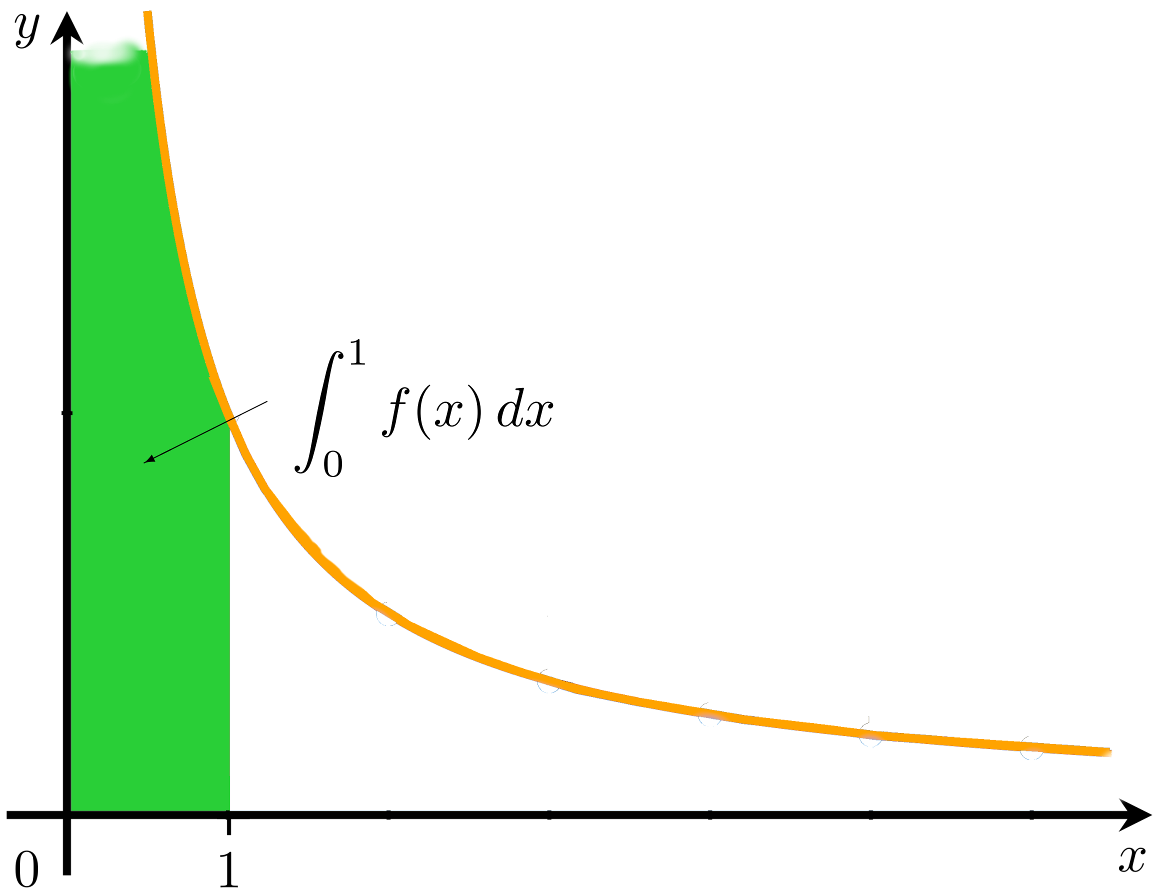
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\,dx$$

est une **intégrale impropre du second type**.

De même pour une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui n'est pas définie en $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\,dx.$$

Si la limite existe, l'intégrale impropre **converge**, sinon elle **diverge**.



y
$\int_0^1 f(x)\,dx$
0
1
x

Exemples: déterminer la convergence des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx;$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx;$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx;$

4. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx;$

5. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx;$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Solutions: il suffit de vérifier si les limites correspondantes existent.

1. Elle diverge puisque

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_u^1 = \lim_{u\to 0^+}\left[-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{u}\right)\right] \\ &= \lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u}-1\right] = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u}\right)-1 = +\infty.\end{aligned}$$

2. Elle diverge puisque

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\big[\ln|x|\big]_u^1 = \lim_{u\to 0^+}\big[\ln|1|-\ln|u|\big] \\ &= \lim_{u\to 0^+}\big[-\ln|u|\big] = +\infty.\end{aligned}$$

3. Elle converge puisque

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_u^1 = \lim_{u\to 0^+}\left[2\sqrt{1}-2\sqrt{u}\right]$$
$$= 2 - 2\lim_{u\to 0^+}\left(\sqrt{u}\right) = 2 - 0 = 2.$$

4. Elle converge puisque

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \ln x\,dx = \lim_{u\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_u^1$$
$$= \lim_{u\to 0^+}\left[(1\ln 1 - 1) - (u\ln u - u)\right]$$
$$= -1 - \lim_{u\to 0^+}(u\ln u - u) = -1 + 0 + 0 = -1.$$

5. En intégrant par parties, on voit qu'elle converge puisque

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \ln x \, dx &= \lim_{u \to 0^+} \int_u^1 x \ln x \, dx \\
&= \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{1}{4} x^2 (-1 + 2 \ln x) \right]_u^1 \\
&= \frac{1}{4} \lim_{u \to 0^+} \left[1^2(-1 + 2 \ln 1) - u^2(-1 + 2 \ln u) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[-1 + \lim_{u \to 0^+} \left(u^2 (1 - 2 \ln u) \right) \right] \qquad \left\{ ⚠ : 0 \cdot \infty \right\} \\
&= -\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

6. Elle converge puisque

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^u \\ &= 2\lim_{u\to 0^+}\left[e^1 - e^{\sqrt{u}}\right] \\ &= 2\left[e - \lim_{u\to 0^+}\left(e^{\sqrt{u}}\right)\right] = 2(e-1).\end{aligned}$$

⚠ **Il faut savoir composer avec les formes indéterminées qui proviennent de logarithmes et d'exponentielles... et maîtriser les techniques d'intégration.**

Les tests de convergence

En pratique, il est préférable de déterminer si une intégrale impropre converge/diverge sans l'évaluer explicitement.

On utilise une batterie de tests pour ce faire.

Théorème: si f est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0,$$

alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$

Le test$-p$ est **très** utile.

Théorème: soit $p > 0$. Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge si et seulement si } p > 1$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge si et seulement si } p < 1.$$

Démonstration: si $a, b \in \mathbb{R}$, on voit que

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - a^{1-p}\right), & \text{si } p \neq 1 \\ \ln|b/a|, & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Il suffit alors de calculer les limites correspondantes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(b^{p-1}-1\right), & \text{si } p \neq 1 \\ \ln|b|, & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

et

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to0^+} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to0^+} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(1-a^{p-1}\right), & \text{si } p \neq 1 \\ -\ln|a|, & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{si } p < 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

⚠ **Dans le pire des cas, on peut toujours évaluer la convergence d'une intégrale impropre avec $\frac{1}{x^p}$ directement.**

Théorème: soit $k \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ and $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent,

$$\int_a^{+\infty} (kf(x) + g(x))\,dx \quad \text{converge également.}$$

Un résultat similaire est également valide pour les intégrales impropres du second type.

⚠ **Ce n'est vrai que pour les intégrales impropres qui convergent.**

Il y a des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dont les intégrales impropres divergent mais pour lesquelles l'intégrale impropre de la somme converge (comme $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$, par exemple).

Exemples: déterminer la convergence des des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx;$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4}\, dx;$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4}\, dx.$

Solution: il suffit de vérifier si les limites correspondentes existent.

1. En intégrant par parties ($f(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x^3}$), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\left[-\frac{\ln x}{2x^2} \right]_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{1}{x^3}\,dx \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\ln b}{2b^2} - 0 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^b \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4} \right] = 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \implies \text{converge.}
\end{aligned}$$

2. En simplifiant, nous obtenons

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4}\, dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\, dx.$$

Selon le test$-p$, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\, dx \quad \text{and} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}$$

sont toutes convergentes; selon le tout dernier théorème,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\, dx \quad \text{converge.}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{(x+1)^2}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[b+2\ln|b|-\frac{1}{b}\right] = +\infty \implies \text{diverge.}
\end{aligned}$$

Théorème: soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \geq a$. Alors

1. Si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

2. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge.

Théorème: soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues sur $]a, b]$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $a < x \leq b$. Alors

1. Si $\int_a^{b} g(x)\, dx$ converge, alors $\int_a^{b} f(x)\, dx$ converge.

2. Si $\int_a^{b} f(x)\, dx$ diverge, alors $\int_a^{b} g(x)\, dx$ diverge.

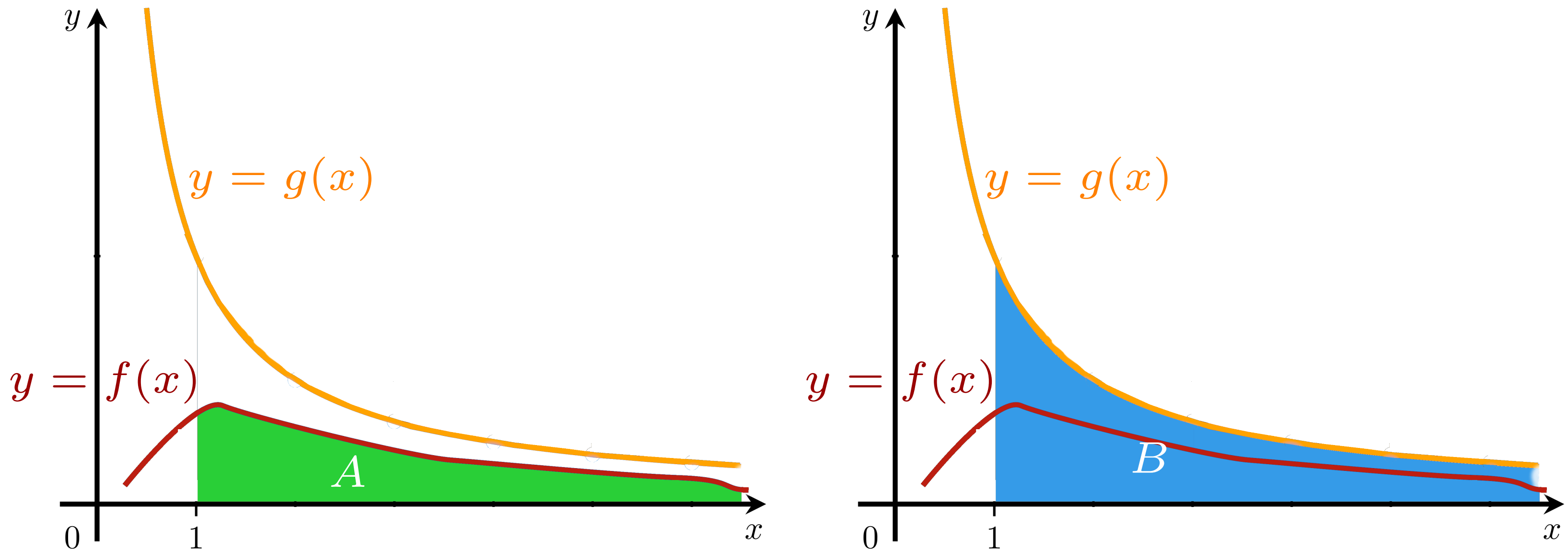
⚠ **Il faut faire attention à la direction des implications dans ces théorèmes!**

$$\int_a^{b,\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \int_a^{b,\infty} g(x)\,dx \quad \text{converge ou diverge}$$

$$\int_a^{b,\infty} g(x)\,dx \quad \text{diverge} \quad \not\Longrightarrow \int_a^{b,\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge ou diverge}$$

Ces **tests de comparaison** sont compatibles avec l'interprétation de l'intégrale en tant qu'aire d'une région.

Soient A et B les régions délimités respectivement par l'axe des x et les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ entre $a = 1$ (mettons) et $+\infty$.



Puisque $g(x) \geq f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$, A est contenue dans B.

Si l'aire de B est finie, il en est de même pour l'aire de A; de plus, si la région A est trop "grande" pour que son aire soit finie, il en est de même pour B.

Exemples: déterminer la convergence des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx;$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx;$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+x}\,dx;$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^{3/2}}\,dx;$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^3+x}\,dx;$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+2x^3+x}\,dx.$

Solutions: on utilise les tests présentés dans cette section.

1. Effectuons la substitution $u = x - 2$. Alors

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

   Selon le test$-p$ ($p = 1/2$), cette intégrale converge.

2. Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, d'où $-x \geq -x^2$ et $e^{-x} \geq e^{-x^2} > 0$. Ainsi

$$0 \leq \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

   Mais $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge. Selon le test de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge également.

3. Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, d'où $x^2 + x \leq 2x^2$ et $\frac{1}{x^2+x} \geq \frac{1}{2x^2}$ et

$$\frac{x}{x^2 + x} \geq \frac{x}{2x} = \frac{1}{x} \geq 0.$$

Ainsi

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x}\, dx.$$

Selon le test$-p$, $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, d'où $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+x}\, dx$ diverge également, en vertu du test de comparaison.

4. Si $0 < x \leq 1$, alors $x + 1 \geq 1$, d'où

$$\frac{x + 1}{x^{3/2}} \geq \frac{1}{x^{3/2}} \geq 0.$$

Ainsi

$$0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}} \leq \int_0^1 \frac{x+1}{x^{3/2}}\, dx.$$

Selon le test$-p$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ diverge, d'où $\int_0^1 \frac{x+1}{x^{3/2}}\, dx$ diverge également, en vertu du test de comparaison.

5. Si $x \geq 1$, alors $x^4 + 2x^3 + x \geq x^4$, d'où $0 \leq \frac{1}{x^4+2x^3+x} \leq \frac{1}{x^4}$ et

$$\frac{x^2}{x^4 + 2x^3 + x} \leq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 2x^3 + x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\, dx.$$

Selon le test$-p$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, d'où $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^3+x}\,dx$ converge également, en vertu du test de comparaison.

6. Si $x \geq 1$, alors $x^4+2x^3+x \leq x^4+2x^4+x^4 = 4x^4$, d'où $\frac{1}{x^4+2x^3+x} \geq \frac{1}{4x^4}$ et
$$\frac{x^2}{x^4+2x^3+x} \geq \frac{x^2}{4x^4} = \frac{1}{4x^2} \geq 0.$$
Ainsi
$$0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{4x^2} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+2x^3+x}\,dx.$$
Selon le test$-p$, $\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge, d'où $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+2x^3+x}\,dx$ diverge également, en vertu du test de comparaison.

⚠ **Il faut de la pratique, encore de la pratique, et toujours plus de pratique.**

Résumé

Exercices suggérés